Grado 11

Matemáticas - Unidad 1

Operando en el conjunto de los números reales

Tema

Construcción de algunos números Irracionales

Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)	**Grado 11:** **UoL_1:** Operando en el conjunto de los números reales **LO_1:** Construcción de los números naturales, enteros y racionales
Objetivos de aprendizaje	1. Construir algunos I con regla y compás, para determinar su posición en la recta numérica. • Reconocer el conjunto de los irracionales a partir de procesos históricos • Clasificar los números irracionales y sus propiedades • Construir algunos irracionales con regla y compás
Habilidad / Conocimiento (H/C)	**SCO1: Reconoce el conjunto de los números Irracionales** 1. Investiga sobre el origen de los números irracionales. 2. Relaciona las características del período de las cifras decimales de un número con el conjunto de los Irracionales 3. Determina los números irracionales como aquellos que presentan relación con los números cuadrados y cubos perfectos 4. Conjetura a partir de los números cuadrados y cubos perfectos la definición de número Irracional **SCO2: Identifica el conjunto de los números Irracionales** 5. Diferencia los números racionales e irracionales. 6. Clasifica los números en Irracionales trascendentes e irracionales algebraicos. 7. Establece jerarquía entre los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e Irracionales. 8. Determina las propiedades de los números Irracionales. 9. Aproxima números irracionales a racionales para realizar cálculos. **SCO3: Modela con construcciones el conjunto de los números Irracionales** 10. Determina que los números irracionales trascendentes no son construibles con regla y compás. 11. Argumenta sus conclusiones sobre números irracionales no construibles 12. Relaciona la división de segmentos con regla y compás con la construcción de números racionales 13. Construye números irracionales con regla y compás 14. Realiza construcciones con programas interactivos para comprobar su procedimiento 15. Identifica aplicaciones de algunos números irracionales (pi, e, número de oro, etc.)

Flujo de aprendizaje	1. **Introducción:** ¿Qué? ¿Hay más números? [H/C 1 - H/C 5 – H/C 15] 2. **Objetivos de aprendizaje.** 3. **Contenido:** 3.1. **Actividad 1:** ¿Cómo diferenciar los números irracionales? (H/C 2 - H/C 5) 3.2. **Actividad 2:** Cuadrados y Cubos Perfectos, ¿imperfectos? (H/C 3 - H/C 4) 3.3. **Actividad 3:** ¿Algebraicos? ¿Trascendentes? Descubre más Irracionales (H/C 6 - H/C 7 - H/C 10 - H/C 11) 3.4. **Actividad 4:** Trabajando con los Irracionales. (H/C 8 - H/C 9) 3.5. **Actividad 5:** ¡Ahora SI! Construyamos algunos Irracionales. (H/C 12 - H/C 13 - H/C 14) 4. **Resumen:** Reflexionando. 5. **Tarea.**
Lineamientos evaluativos	Los estudiantes a través de las diferentes actividades estarán en la capacidad de reconocer la caracterización de los números irracionales para diferenciarlos de los números racionales mediante el desarrollo histórico de estos, además podrán clasificarlos entre números algebraicos o trascendentes al igual que reconocer sus propiedades. Los estudiantes también podrán realizar cálculos aproximados entre Irracionales y construir algunos de los Irracionales con regla y compas para poder representarlos en la recta numérica de forma correcta.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
Introducción	**Introducción**	**¿Qué? ¿Hay más números? (H/C 1, H/C 5, H/C 15)** El docente presenta el título **¿Qué? ¿Hay más números?** y las preguntas de la actividad introductoria que deben realizar los estudiantes al término del video, esto con el objetivo de lograr obtener la atención de los estudiantes en el video ya que es el material clave para poder responder a: • ¿A qué hace alusión la palabra Fibonacci en el video? • ¿Cómo empezaron a aparecer los números irracionales? • ¿Qué opinas de los números irracionales? • ¿Por qué el número $\sqrt{2}$ es irracional? ¿Cómo puede asegurarlo? ¿es $\sqrt{2}$=1.4142?	**Recurso Interactivo** Acompañado de un dibujo que muestra una expresión de asombro y con un enlace al video introductorio. **Video:** El video consiste en mostrar algo de la historia de las matemáticas que contribuyeron a la aparición de los números irracionales. Se empieza con un corto discurso sobre la importancia de las matemáticas para el mundo, seguido a esto se inicia con el surgimiento de $\sqrt{2}$ y luego con la aparición del número áureo; son dos irracionales que gozan de buena fama

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		El video muestra parte de la historia de los primeros irracionales que surgieron y que por sus características especiales gozan de gran fama, entre ellos tenemos al número áureo y raíz de 2. Posterior a la presentación del video, el docente debe: • Solicitar a los estudiantes que contesten las preguntas de la actividad introductoria que ya fueron socializadas al inicio de la clase. • El docente pide a unos 3 o 4 estudiantes que compartan su respuesta con el resto del grupo y luego se enfoca en la última pregunta, es decir en la irracionalidad de $\sqrt{2}$	en el mundo de las matemáticas. **Ver (Anexo1)** **Recurso Interactivo** Presenta la actividad introductoria que consta de cuatro preguntas: • ¿A qué hace alusión la palabra Fibonacci en el video? • ¿Cómo empezaron a aparecer los números irracionales? • ¿Qué opinas de los números irracionales? • ¿Por qué el número $\sqrt{2}$ es irracional? ¿Cómo puede asegurarlo? ¿es $\sqrt{2}=1.4142$?
		La irracionalidad de $\sqrt{2}$ Antes de discutir **la irracionalidad de raíz de 2**, el docente presenta el recurso **"Crisis científicas y argumentación lógica"**, en el que se plantea la importancia de la forma de argumentación por reducción al absurdo. Aquí el docente apoyado en el recurso, muestra la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y posteriormente la solución a la pregunta ¿es $\sqrt{2} = 1.4142$? la cual consiste en mostrar que de ser cierta, se llega a la conclusión de poder representarse como una fracción lo cual está en contra con lo demostrado ya que $\sqrt{2}$ **NO** se puede expresar en la forma de fraccionario, pero es seguido por otra argumentación que consiste en mostrar que efectivamente al elevar 1.4142 al cuadrado ese resultado no da exactamente 2, solo da aproximadamente 2.	También presenta el recurso **crisis científicas y argumentación lógica** junto con la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y la respuesta a ¿es $\sqrt{2}=1.4142$? **(Anexo 2)**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
Objetivos		El docente, en compañía de los estudiantes, escribe el objetivo al que creen que se debe llegar. Después, se recomienda presentar el objetivo propuesto para este objeto de aprendizaje. Se considera importante, que se realice la explicación del objetivo propuesto, pues a partir de éste el estudiante reconocerá lo que debe alcanzar finalizado el proceso enseñanza-aprendizaje.	**Texto:** Se presenta en pantalla los objetivos de este objeto de aprendizaje.
Contenido	El docente presenta el tema	**Actividad 1: ¿Cómo diferenciar los números irracionales? (H/C 2, H/C 5)** Ahora el docente conduce al estudiante a comprender la diferencia que existe entre números racionales e irracionales, la cual se basa en la expansión infinita de decimales no periódicos que caracteriza a los irracionales, por medio de la siguiente actividad: • Encuentre la expresión decimal de 7/4 y 4/7. • Encuentre una expresión fraccionaria para representar 2,34 y 0,3333... • ¿Qué puedes concluir de los anteriores resultados? Al socializar las respuestas el docente debe guiarlos a la conclusión de que toda división de dos números enteros da como resultado una expresión decimal finita o infinita periódica, y viceversa, de esta forma se definen los racionales: son números que se pueden expresar de la forma p/q. Con ayuda del recurso muestra la solución de las preguntas anteriores junto con la conclusión seguido de una última pregunta: • ¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?	**Recurso Interactivo** Presenta la actividad: • Encuentre la expresión decimal de 7/4 y 4/7. • Encuentre una expresión fraccionaria para representar 2,34 y 0,3333...? • ¿Qué puedes concluir de los anteriores resultados? Con sus respectivas respuestas al dar click sobre cada una. **(Anexo 3)** Al final aparece la pregunta, seguida de su respuesta: **¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?**

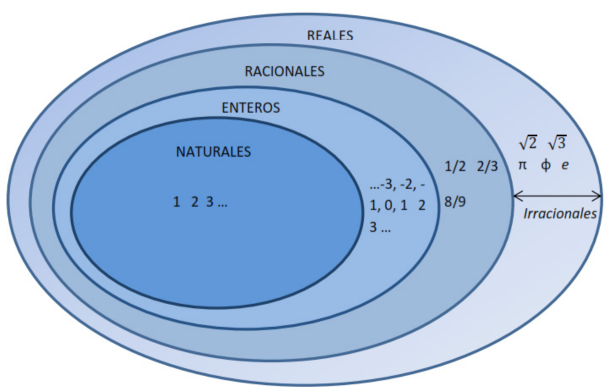
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		La respuesta a la anterior pregunta aparece al dar click sobre ella, de la siguiente manera: **Si un número tiene infinitos decimales no periódicos, este no se puede representar de la forma p/q y por lo tanto no es racional, a este tipo de números se les denomina irracionales.**	
		Al final de la actividad en el material del estudiante aparecerá en forma llamativa la pregunta: • ¿Sabes cómo hallar otros números irracionales? Esta pregunta tiene como fin el de poner a los estudiantes a pensar sobre qué otros números irracionales conocen.	**Recurso Interactivo** Presenta la pregunta: **¿Sabes cómo hallar otros números irracionales?** de forma llamativa. **Material del estudiante** **Presenta la actividad 1:** cada ítem con su espacio para contestar, seguido a esto presenta la pregunta: **¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?** **Material del estudiante** Presenta la pregunta: **¿Sabes cómo hallar otros números irracionales?**
		Actividad 2: Cuadrados y Cubos Perfectos, ¿imperfectos? (H/C 3, H/C 4) El docente retoma la anterior pregunta ¿Sabes cómo hallar otros números irracionales? y continúa con las siguientes preguntas, las cuales se espera conduzcan al estudiante a comprender la existencia de infinitos irracionales: • ¿Qué resultado se obtiene al realizar la siguiente operación $\sqrt{2} + 1/2$? • ¿A qué conjunto numérico pertenece el anterior resultado? • Y si le sumamos otro número racional	**Recurso Interactivo** Presenta las preguntas: • ¿Qué resultado se obtiene al realizar la siguiente operación $\sqrt{2}+1/2$? • ¿A qué conjunto numérico pertenece el anterior resultado? • Y si le sumamos otro número racional cualquiera a $\sqrt{2}$, ¿a qué conjunto numérico pertenece el resultado?

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		cualquiera a $\sqrt{2}$, ¿a qué conjunto numérico pertenece el resultado? • ¿Qué sucede si resto, multiplico o divido un racional cualquiera con $\sqrt{2}$? Con esto se espera que los estudiantes descubran y comprendan que existen infinitos irracionales. En la socialización, el docente explica la razón por la cual los números trabajados pertenecen al conjunto de los irracionales de la siguiente manera: **Explicación:** La operación $\sqrt{2}+1/2$ implica un proceso infinito puesto que $\sqrt{2}$ es irracional, lo que equivale a que es un número cuya expresión decimal es infinita y no periódica, observe: $\sqrt{2} + 1/2 = 1.\mathbf{4}14213562... + 0.\mathbf{5} = 1.\mathbf{9}14213562...$ De acuerdo a la definición anterior este número $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional porque tiene infinitos decimales y no periódicos. Ahora una mejor forma de ver que $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional: Dado que todo número real o es racional, o es irracional, se puede demostrar la irracionalidad mostrando que no es racional. Para ello se supone que $\sqrt{2}+1/2$ es racional, entonces: $\sqrt{2} + 1/2=n/m$ donde **m y n** son enteros, Esta última ecuación implica que $\sqrt{2}=n/m - 1/2$ y de acuerdo a las propiedades de los racionales, la suma (resta) de dos números racionales es racional, llegando a una contradicción pues $\sqrt{2}$ es irracional como ya se había demostrado. Por lo tanto $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional.	• ¿Qué sucede si resto, multiplico o divido un racional cualquiera con $\sqrt{2}$? **Recurso Interactivo** Presenta la explicación de la irracionalidad de los números trabajados en las preguntas mencionadas arriba, junto con las excepciones de la multiplicación y la división. **(Anexo 4)**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		De esta misma manera se puede demostrar que la suma de $\sqrt{2}$ con cualquier racional de la forma n/m pertenece al conjunto de los números irracionales.	
		Con esta explicación se espera que el estudiante comprenda que existen infinitos irracionales, por lo menos tantos como racionales y además que tenga la capacidad de dar respuesta al resto de las preguntas. Sin embargo el docente debe aclarar los casos particulares que se presentan en la última pregunta: • **¿Qué sucede si resto, multiplico o divido un racional cualquiera con $\sqrt{2}$?** para ello en el recurso se muestran las excepciones: La multiplicación de $0.\sqrt{2}=0$ y 0 es racional. No se puede dividir por 0 (cero) porque no está establecida debido a que todo número multiplicado por cero da cero.	
		Ahora el docente realiza la siguiente pregunta: • **¿Existe algún otro irracional diferente a $\sqrt{2}$, aparte de los vistos?** Esta pregunta es con el objetivo de introducir otros números irracionales como $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$ entre otros de la misma naturaleza. Para ello, el docente con ayuda del recurso muestra: **RAICES EXACTAS** $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{196} = 14$ **¿Qué tienen en común estas raíces cuadradas?**	**Recurso Interactivo** **Presenta las preguntas:** • ¿Existe algún otro irracional diferente a $\sqrt{2}$, aparte de los vistos? • ¿la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es racional, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{6}$ entre otros? Con sus respectivas explicaciones de raíces exactas y raíces inexactas **(Anexo 5)**

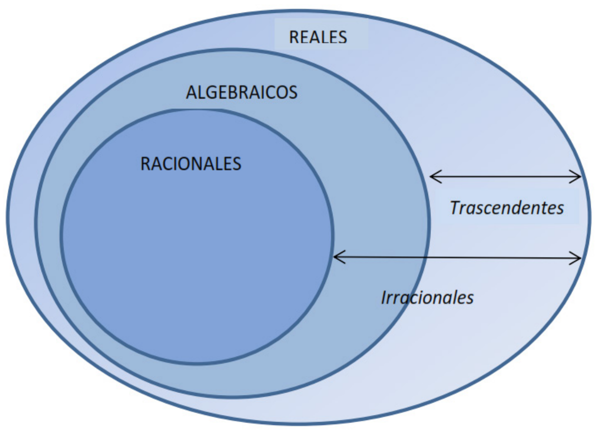
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Tienen en común que 4, 9, 64 y 196 son números cuadrados perfectos porque $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $64 = 8^2$ y $196 = 14^2$ La propiedad de los exponentes plantea lo siguiente: $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$ Por esta propiedad es que resulta: $$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$$ $$\sqrt{4} = 2$$ De lo anterior se puede observar que entonces todas las raíces cuadradas de números cuadrados perfectos son números racionales. $$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$	
		Ahora el docente plantea la siguiente pregunta: **¿la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es racional, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{6}$ entre otros?**	
		Tras la socialización se espera que los estudiantes relacionen la irracionalidad de $\sqrt{2}$ para dar respuesta a la anterior pregunta, sin embargo el docente explica lo siguiente: **RAICES INEXACTAS** Observe lo siguiente: $\sqrt{4} = 2$ *porque* $2^2 = 4$ *y ahora:* $\sqrt{2} = ?$ Busquemos un número que al elevarlo al cuadrado de 2 es decir $n^2 = 2$	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Por ejemplo: $1^2 = 1$ ó $1.4^2 = 1.96$ $1.41^2 = 1.9881$ $1.42^2 = 2.0164$ Esto quiere decir que el número que se busca está entre 1.41 y 1.42, pero observe que al elevar al cuadrado un numero con cifras decimales, estas se duplican, o sea que un número con tres cifras decimales al elevarlo al cuadrado tendrá seis cifras decimales y así sucesivamente, lo que deja ver que a medida que se tomen más cifras decimales se aproxima más a 2, pero nunca será igual. Es por esta razón que cualquier raíz cuadrada $\sqrt{n}$ de un número **n**, que no es cuadrado perfecto, es irracional, porque no existe un numero racional que al elevarlo al cuadrado de exactamente **n**.	
		Luego de la explicación el docente solicita a los estudiantes contestar en el material del estudiante: • ¿Cuáles raíces cúbicas tienen solución en los racionales? • De tres ejemplos de raíces cúbicas que sean irracionales y explique ¿Por qué? Con ello se espera que los estudiantes tengan un conocimiento más amplio sobre los números irracionales que existen. Luego el docente muestra la siguiente pregunta con el objetivo de inquietar y enlazar a los estudiantes con la actividad siguiente.	**Material del estudiante** Presenta las preguntas con su respectivo espacio para responder: • ¿Cuáles raíces cúbicas tienen solución en los racionales? • De tres ejemplos de raíces cúbicas que sean irracionales y explique ¿Por qué? Con el respectivo espacio para responder.
		Para pensar: **¿Será que todos los irracionales tienen la forma de raíz inexacta?**	**Recurso Interactivo** Presenta de forma llamativa la expresión: Para pensar: **¿Será que todos los irracionales tienen la forma de raíz inexacta?**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Actividad 3: ¿Algebraicos? ¿Trascendentes? Descubre más Irracionales (H/C 6, H/C 7, H/C 10, H/C 11) **Jerarquía de los conjuntos numéricos** Esta actividad empieza con la clasificación de los números en Naturales, Enteros, Racionales o Irracionales. La actividad consiste en una tabla en la cual cada estudiante señala la pertenencia o la no pertenencia de los números propuestos en la primera columna en uno o más de uno de los conjuntos numéricos.	**Recurso Interactivo** Presenta de forma llamativa el título: **Jerarquía de los conjuntos numéricos** con una ilustración en forma de diagrama de Venn en la que deberán completar el orden correcto de cada conjunto numérico. **(Anexo 6)**
		Luego el docente con ayuda de los estudiantes completa el diagrama de Venn que se muestra en el recurso interactivo, esto con el objetivo de enfatizar las relaciones de los conjuntos numéricos en cuanto a su contenencia, y además verificar las respuestas de acuerdo a la información acabada de construir sobre la jerarquía de los conjuntos numéricos. Con esto, se espera que el estudiante identifique claramente cada uno de los conjuntos numéricos.  	**Material del estudiante** Presenta la actividad de clasificación de números en Naturales, Enteros, Racionales o Irracionales. **(Anexo 7)**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Ahora el docente realiza las siguientes preguntas para recordar un poco sobre ecuaciones y así poder introducir los números algebraicos y trascendentes: • ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$? • ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$? • ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $nx - m = 0$ donde n y m son enteros y n es distinto de cero? • ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^2 - m = 0$ con m entero positivo? • ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^3 - m = 0$ con m entero positivo? El docente solicita a tres o cuatro estudiantes que compartan sus respuestas con el resto del grupo, luego hace énfasis en las tres últimas preguntas y muestra en el recurso las siguientes conclusiones: La solución general a la ecuación $nx - m = 0$ es: $$x = \frac{m}{n}$$ La solución general a la ecuación $x^2 - m = 0$ es: $$x = \sqrt[2]{m}$$ La solución general a la ecuación $x^3 - m = 0$ es: $$x = \sqrt[3]{m}$$ De esto se puede concluir que todo número racional, toda raíz cuadrada de un entero positivo y toda raíz cúbica de un entero positivo son soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros.	**Recurso Interactivo** Presenta las preguntas: • ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$? • ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$? • ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $nx - m = 0$ donde n y m son enteros y n es distinto de cero? • ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^2 - m = 0$ con m entero positivo? • ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^3 - m = 0$ con m entero positivo? De tal manera que al dar click sobre la última se muestre la solución junto con la conclusión **(Anexo 8)**

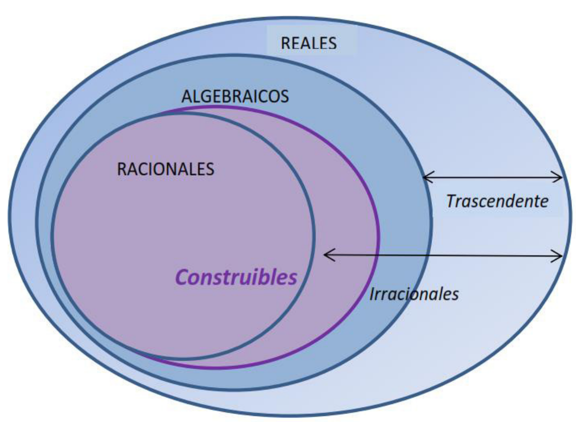
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Con base en lo anterior, el docente presenta la definición de número algebraico: **Los números algebraicos son todos aquellos que son solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros.** • ¿Cuáles de los siguientes números son algebraicos? ¿Por qué? $2\ ,\ -5\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{8}$	**Recurso Interactivo** Presenta la definición de número algebraico y la pregunta: • ¿Cuáles de los siguientes números son algebraicos? ¿Por qué? $2\ ,\ -5\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{8}$
		Tras la definición de números algebraicos se plantea la siguiente pregunta: **¿Existe algún número que NO sea algebraico?** El objetivo de esta pregunta es introducir de manera informativa los números trascendentes por medio de una reseña histórica sobre el número π. De la siguiente manera: Efectivamente existen números que **NO** son algebraicos por no ser solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros y reciben el nombre de números **TRASCENDENTES**. La trascendencia de algunos números como solo fue demostrada en el siglo XIX, aunque se haya trabajado con él desde la antigüedad, pues los babilonios, egipcios, griegos y chinos conocían la existencia de π y trabajaban con aproximaciones de este al relacionar la circunferencia con su diámetro: $\pi = c/d$ donde **c:** perímetro de la circunferencia **d:** diámetro de la circunferencia	**Recurso Interactivo** Presenta de forma llamativa la pregunta: • ¿Existe algún número que NO sea algebraico? Seguida por una flecha que apunte hacia la derecha y que contenga la palabra SI; de tal manera que al dar click sobre la flecha se muestre la reseña sobre el número π **(Anexo 9)** **Material del estudiante** Se muestra la reseña histórica sobre trascendencia y el número π

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Ahora el docente plantea la siguiente pregunta: • **Si un número trascendente no es algebraico y todo racional es algebraico, ¿habrá algún número trascendente que sea racional?** Después de discutir la pregunta anterior el docente presenta el recurso donde se muestra la jerarquía entre los racionales, los algebraicos y los trascendentes. Esta jerarquía muestra la importancia de los números trascendentes: pues si se demuestra que un número es trascendente, esto prueba que tal número no es racional y por lo tanto es irracional. 	**Recurso Interactivo** Presenta la pregunta: • Si un número trascendente no es algebraico y todo racional es algebraico, ¿habrá algún número trascendente que sea racional? Seguido por la gráfica que muestra la jerarquía entre los algebraicos y los trascendentes.
		Para finalizar, el docente hace un recorrido completo de los números, desde los naturales hasta los Racionales y luego la aparición de los Irracionales haciendo énfasis en su clasificación. Primero presenta a los naturales como aquellos que se utilizan para contar y que justamente surgieron para satisfacer esa necesidad. Luego presenta a los enteros como una ampliación de los naturales hacia los números negativos incluyendo al cero para establecer la propiedad de cerradura en las operaciones de suma y resta.	**Recurso Interactivo** Presenta un diagrama que muestre la jerarquía de los conjuntos numéricos **(Anexo 9)**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Después presenta la ampliación del conjunto numérico a los racionales que representan cocientes de números enteros. Ahora presenta a los irracionales como aquellos números que tienen infinitos decimales no periódicos. Finalmente muestra que los irracionales de clasifican en algebraicos y trascendentes, además que los naturales, enteros y racionales también son algebraicos.	
		Actividad 4: Trabajando con los Irracionales (H/C 8, H/C 9) En esta actividad el objetivo es el de realizar cálculos con números irracionales haciendo uso de la aproximación decimal e identificar las propiedades de los irracionales. Para empezar el docente realiza la siguiente pregunta con la explicación: • **Si los números irracionales tienen infinitos decimales ¿Cómo hago para sumar, restar, multiplicar o dividir números irracionales?** Para sumar o restar irracionales solo puedo hacerlo entre cantidades irracionales semejantes, utilizando el método de factor común, por ejemplo: $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ $3\pi - 7\pi + 2\pi = 2\pi$ Mientras que: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ No se puede resolver porque no tienen un factor común. Para multiplicar o dividir irracionales se siguen las reglas del algebra, y en el caso de los irracionales con radicales se siguen las reglas de la radicación, observen	**Recurso Interactivo** Presenta la pregunta: • Si los números irracionales tienen infinitos decimales ¿Cómo hago para sumar, restar, multiplicar o dividir números irracionales? Junto con la explicación **(anexo 10)**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		algunos ejemplos: $$e.4e^{2x+3} = 4e^{2x+4} \;\; con\; x \in Z$$ $$3\pi.7\pi^3 = 21\pi^4$$ $$\frac{12\pi^3}{3\pi} = 4\pi^2$$ **Para multiplicar irracionales con radicales existen muchos caminos:** $$\sqrt{3}.4\sqrt{3}$$ $$\sqrt{3}.4\sqrt{3} = 4(\sqrt{3})^2 = 4.3 = 12$$ $$\sqrt{3}.4\sqrt{3} = 4.(\sqrt{3}.\sqrt{3}) = 4.\sqrt{3.3} = 4.\sqrt{9} = 4.3 = 12$$ $$\sqrt{3}.4\sqrt{3} = \sqrt{3}.\sqrt{3.4^2} = \sqrt{3}.\sqrt{48} = \sqrt{3.48} = \sqrt{144} = 12$$ cuando los radicales no tienen el mismo índice: $$\sqrt[2]{5}.\sqrt[3]{6} = \sqrt[2.3]{5^3}.\sqrt[3.2]{6^2} = \sqrt[6]{125}.\sqrt[6]{36} = \sqrt[6]{125.36} = \sqrt[6]{4500}$$	
		Verificando las propiedades: El docente con ayuda del recurso y de los estudiantes resuelve algunos ejercicios de suma, resta, multiplicación y división con irracionales con el objetivo de identificar las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, inversos y elementos neutros y además la no existencia de la propiedad clausurativa en los irracionales: $$\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$ $$\sqrt{8} - \sqrt{8} = 0$$ $$\pi.\frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$ $$\sqrt{5}.(e+7) = \sqrt{5}e + 7\sqrt{5}$$ $$\sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$	**Recurso Interactivo** Presenta la actividad en donde se verifican las propiedades de los irracionales.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Como se puede observar algunos resultados de las operaciones entre irracionales son racionales, por esa razón los irracionales no satisfacen la propiedad clausurativa.	
		Ahora el docente retoma el ejercicio de la suma de irracionales, la cual se puede resolver pero solo a partir de aproximaciones de los valores involucrados, y procede a explicar cómo se realizan las aproximaciones decimales de los números irracionales en la vida cotidiana, para poder obtener un valor aproximado, la cual consiste en tomar unos cuantos decimales del número irracional, por ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\sqrt{2}=1{,}414213562\ldots$ $\quad\sqrt{3}=1{,}732050808\ldots$ $\sqrt{2}\cong 1{,}41$ ó $\sqrt{2}\cong 1{,}4142$ $\quad\sqrt{3}\cong 1{,}73$ ó $\sqrt{3}\cong 1{,}7320$ La suma sería: $\sqrt{2}+\sqrt{3}\cong 1{,}41+1{,}73\cong 3{,}14$	**Recurso Interactivo** Presenta la explicación de la aproximación decimal que se debe realizar a los irracionales para facilitar el cálculo y poder obtener una idea cercana del resultado.
		Se puede aproximar con la cantidad de cifras decimales que se desee, la elección depende del tipo de medida que se esté realizando. Cualquiera de las aproximaciones sirve de igual manera, la diferencia radica en la precisión, mientras más cifras decimales se tomen, más aproximado estará al valor real. El docente hace énfasis en que la solución encontrada no es más que una aproximación al resultado real, que nunca serán iguales, que solo nos sirve para tener una idea muy cercana del resultado.	**Recurso Interactivo** Muestra las diferentes aproximaciones de acuerdo al contexto en que se estén utilizando. Y la precisión de la medida en cuanto a cantidad de decimales tomando por ejemplo las medidas que realizan los arquitectos comparadas con las medidas que utilizan los físicos o las medidas utilizadas por cocineros comparadas con la medidas que utilizan los químicos.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Con respecto a la aproximación decimal, el docente debe aclarar que la cantidad de decimales que se requieran en la aproximación depende del contexto en el que se estén utilizando. La aproximación con dos decimales como $\sqrt{2}$=1.41, significa que el error de precisión es menor que una centésima y este error para un constructor tal vez sea aceptable mientras que para un físico tal vez sea un error garrafal. También debe mostrar que mientras más decimales se tomen en la aproximación, más precisa es la medida.	
		Actividad 5: ¡Ahora SI! Construyamos algunos Irracionales (H/C 12, H/C 13, H/C 14) El docente con ayuda del recurso muestra lo siguiente: **Algunos de los números irracionales se pueden construir geométricamente con regla y compás como por ejemplo $\sqrt{2}$.** La frase "construir con regla y compás" hace referencia a la geometría euclidiana en donde la regla carece de medida y solo sirve para trazar líneas rectas y el compás se cierra al levantarse del papel razón por la cual no sirve para trasladar medidas.  	**Recurso Interactivo** Presenta la explicación de números construibles junto con la gráfica.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados

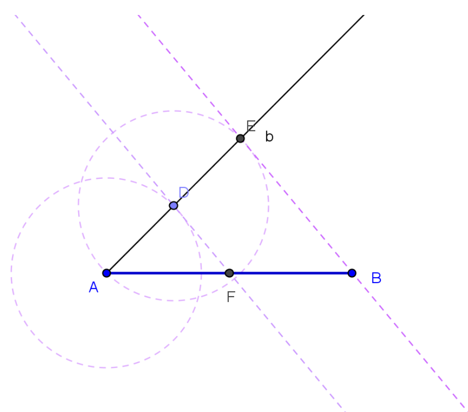
En la gráfica se puede observar:

- Los números construibles son números algebraicos
- No todos los algebraicos son construibles
- Los trascendentes no son construibles.

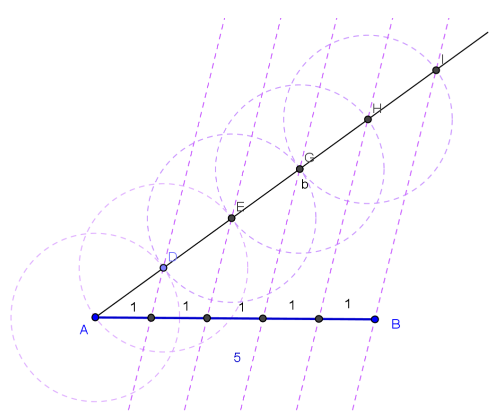
Luego con el recurso el docente recuerda, con ayuda del teorema de tales, cómo se puede dividir un segmento en partes iguales, lo cual se utiliza para construir los números racionales y que podrá ser de ayuda para construir irracionales del tipo $\sqrt{2}+\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}$ entre otros.

Recurso Interactivo

Presenta de forma interactiva la división de segmentos en partes iguales, la idea es que se vaya construyendo paso a paso al dar click.



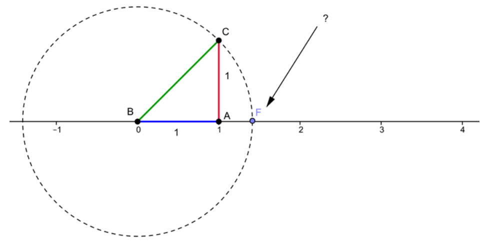
Aquí el segmento se divide en dos partes iguales.



Y acá el segmento se divide en cinco partes iguales.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados

Ahora el docente con ayuda del recurso plantea las siguientes preguntas relacionadas con la ubicación de algunos números irracionales en la recta numérica a igual que su construcción con regla y compas:



Analizando la gráfica responda:

- ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo ABC?
- ¿Cuánto mide el segmento de color verde?
- ¿Qué método utilizo para hallar su medida?
- ¿Cuánto mide el segmento BF?

Se espera que los estudiantes logren llegar a la conclusión de que se acaba de construir el numero $\sqrt{2}$ por medio del teorema de Pitágoras aplicándolo al triángulo rectángulo ABC para hallar la medida de la hipotenusa y llegar a que el punto F sobre la recta numérica corresponde a $\sqrt{2}$, sin embargo el docente muestra el paso a paso de la construcción con regla y compas para dejar claro el procedimiento de la siguiente manera:

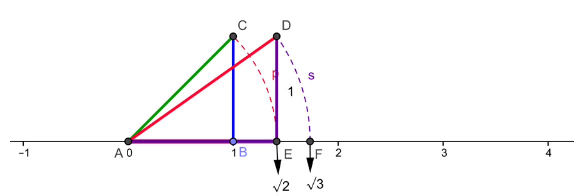
El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 1 y haciendo uso del teorema de Pitágoras se obtiene que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ así:

$$h^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 1^2 + 1^2$$
$$h^2 = 1 + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{2}$$

Recurso Interactivo

Presenta la gráfica junto con las preguntas:

- ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo ABC?
- ¿Cuánto mide el segmento de color verde?
- ¿Qué método utilizo para hallar su medida?
- ¿Cuánto mide el segmento BF?

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		Luego se traza una circunferencia con centro en el origen y radio AC = $\sqrt{2}$ trasladando de esta manera la medida de $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica, ya que AE es radio de la misma circunferencia por tanto: $AC = AE = \sqrt{2}$ Ahora el docente solicita a los estudiantes construir en el material del estudiante los siguientes números irracionales de forma similar a $\sqrt{2}$: $2\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad 1+\sqrt{6} \quad y \quad 1-\sqrt{7}$ El docente muestra una ayuda para construirlos la cual consiste en utilizar el teorema de Pitágoras de atrás para delante de la siguiente manera:	**Recurso Interactivo** Presenta la explicación de la construcción de $\sqrt{2}$ paso a paso **(Anexo 11)**
		Si quiero construir $\sqrt{3}$ entonces $h=\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad h^2 = ?+? = 3$ $h^2 = 2 + 1 = 3$ $h^2 = a^2 + b^2 = 3$ $es\ decir\ que \quad a^2 = 2 \quad y \quad b^2 = 1$ $por\ lo\ tanto\ a = \sqrt{2}\ y\ b = 1$	**Recurso Interactivo** Presenta la ayuda que muestra cómo utilizar el teorema de Pitágoras de atrás para adelante para construir otros números irracionales cómo $\sqrt{3}$ **(Anexo 12)**
		Entonces si construyo un triángulo rectángulo similar al ejemplo de raíz de dos, pero cuyos catetos midan $\sqrt{2}$ y 1 obtengo la hipotenusa que mide $\sqrt{3}$, luego con una circunferencia puedo trasladar la medida sobre la recta numérica.  Sólo se pueden construir números con regla y compás utilizando otros números que de igual manera sean construibles.	**Material del estudiante** Presenta los números irracionales que se proponen como ejercicios para construirlos con regla y compas, junto con la gráfica que facilite dicha construcción Además también muestra los ejemplos de la construcción de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ **(Anexo 12 y 13)**

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		El estudiante deberá trabajar solo con la ayuda del material del estudiante en donde encontrará los números irracionales que debe construir así como el ejemplo anterior que sirve de guía para realizarlos con regla y compás.	
Resumen	**Resumen**	**Reflexionando** Para concluir el objeto de aprendizaje se hace un recorrido por todo lo visto a través de las actividades anteriores; se puede iniciar con la realización de una lluvia de preguntas abiertas que en conjunto con los estudiantes se analizan y responden. **Lluvia de preguntas:** • ¿Que son los irracionales? • ¿Cómo surgieron los irracionales? • ¿Quién fue Pitágoras? • ¿Cómo surgió el $\sqrt{2}$, el número de oro y π? • ¿En qué consiste la aproximación decimal? • ¿Por qué y cuáles irracionales se pueden construir? A medida que se recogen las opiniones se construye una conclusión.	**Recurso Interactivo** Se presentan las preguntas planteadas cada con su respuesta escondida.
Tarea	**Tarea**	Tras haber realizado un recorrido por todos los temas vistos en las clases anteriores y habiendo construido una conclusión fuerte y coherente sobre lo que es un número Irracional, el docente solicita a los estudiantes lo siguiente: • Construir un mapa conceptual de los números Irracionales. • Construir el número áureo $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ con regla y compas. • Hallar experimentalmente el número π, midiendo el perímetro de una circunferencia y dividiéndolo por el diámetro de la misma.	**Texto** **Material del estudiante** Presenta la tarea propuesta para la casa.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		• Investigar sobre otros números irracionales, cómo e, algunos logaritmos u otros. • Pensar: ¿Qué conjunto es más “grande”: el conjunto de los Racionales o el conjunto de los Irracionales?	

Anexo 1

El video empieza con una introducción de las matemáticas en general, cómo surgieron y su importancia. →	**Video de referencia: https://www.youtube.com/watch?v=lEU1TGOV4QI (0:00 a 0:32)**
Luego se presenta los primeros atisbos en la historia del número $\sqrt{2}$ (raíz de 2). →	**Video de referencia: https://www.youtube.com/watch?v=lEU1TGOV4QI (33:02-36:23) (40:40-42:04) (42:47-42:58) (43:40-45:20)**
Se presenta el descubrimiento del número φ (numero áureo), así como su aparición en la naturaleza y sus aplicaciones en la realidad. →	**Video de referencia: https://www.youtube.com/watch?v=j9e0auhmxnc**

Anexo 2

Raíz de 2 es irracional
Demostración por Reducción al Absurdo

NOTA: Antes de presentar la demostración de la irracionalidad de raíz de 2, se muestra por medio de un video la explicación del método de demostración por reducción al absurdo.
El video se llamaría "crisis científica y argumentación lógica"
Se envía adjunto el documento en pdf, que explica en qué consiste.

Esta demostración consiste en suponer cierto lo contrario y llegar a una contradicción.

Suponemos entonces que raíz de 2 no es irracional, por lo tanto es racional es decir que se puede expresar de la forma p/q donde p y q son primos relativos es decir p/q es irreducible.

Si $\sqrt{2}$ no es irracional, entonces es racional, y si es racional es de la forma p/q

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Ahora para eliminar la raíz cuadrada, elevo al cuadrado ambos lados de la igualdad y resuelvo.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

Si tenemos $p^2 = 2q^2$ esto quiere decir que p^2 es par

Lo que implica que p es par, es decir:

$$p = 2n$$

Si reemplazamos a $p = 2n$ en la ecuación:

$$2q^2 = p^2$$

tenemos:

$$2q^2 = (2n)^2$$

Es decir :

$$2q^2 = 4n^2$$

Si dividimos por 2 ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$q^2 = 2n^2$$

Y por lo tanto q es par, es decir:

$$q = 2m$$

Si $q^2 = 2n^2$ quiere decir que q^2 es par

Lo que quiere decir que tanto p como q son pares, esto equivale a que ambos son divisibles por 2 lo cual es absurdo pues se parte con el supuesto de que p/q es una fracción irreducible.

En conclusión:

$\sqrt{2}$ es Irracional

[La idea es mostrar esta solución paso a paso, de manera que el docente pueda ir explicando el algoritmo de la división (que seguramente ya han olvidado los estudiantes de once)]

- **Encuentre la expresión decimal de 7/4 y 4/7.**

Respuesta:

$$\frac{7}{4} \quad \textit{es} \quad \begin{array}{l|l} \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \hline 30 & 1,75 \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

El numero racional 7/4 tiene expresión decimal finita igual a 1.75 es decir:

$$7/4 = 1.75$$

Mientras que:

$$\frac{4}{7} \quad \textit{es} \quad \begin{array}{l|l} \mathbf{40} & \mathbf{7} \\ \hline \ 50 & 0,571428... \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ 4... & \end{array}$$

El numero racional 4/7 tiene expresión decimal infinta periódica igual a 0.571428... es decir:

$$4/7 = 0.571428...$$

Lo que indica que la división entre dos naturales da como resultado un número decimal finito o infinito periódico.

- **Encuentre una expresión fraccionaria para representar 2,34 y 0,3333...?**

Respuesta:

[La idea es recordar la conversión de números decimales finitos o infinitos periódicos a número fraccionario, sería bueno que su presentación sea de forma interactiva, por ejemplo que al dar click se vaya desarrollando paso a paso y que cada paso tenga su explicación respectiva]

2,34 es un número decimal finito, para encontrar una fracción equivalente se debe multiplicar por un fraccionario de la forma 100/100 de la siguiente manera:

$$2,\underline{3}\,\underline{4} \times \frac{100}{1\underline{0}\,\underline{0}} = \frac{234}{100}$$

La fracción que se escoge es una potencia de 10 que depende de la cantidad de cifras decimales que tenga el número decimal finito al que se le quiere hallar un fraccionario equivalente, como en este caso 2,34 tiene dos cifras decimales se escoge la potencia de $10^2 = 100$ y la razón por la que se multiplica 2,34 por 100/100 es porque 100/100 = 1 y todo número multiplicado por 1 da el mismo número.

0,33333.... Es un número decimal infinito periódico cuya expresión fraccionaria es 1/3 ya que:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{10} & \mathbf{3} \\ \cline{2-2} 10 & 0,333\ldots \\ 10 & \\ 1\ddots & \end{array}$$

Pero recordemos el método para hallar una fracción equivalente a un número decimal infinito periódico dado. En este caso 0,3333 = 0,3 tiene una sola cifra decimal periódica.

Multiplicamos x por 10 tantas veces hasta cuando el decimal resultante tenga su parte periódica en "correspondencia" con 0.3333... y después restamos x al resultado de forma tal que las dos "colas" de decimales se anulen:

$10x = 3.3333...$

Ahora podemos restar x de $10x$:

$$\begin{array}{r} 10x = 3.3333... \\ x = 0.3333... \\ \hline 9x = 3 \end{array}$$

$x = 3/9 = 0.33$

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9}$$

Claramente se observa que al simplificar 3/9 se obtiene 1/3 como se había mostrado al principio.

- **¿Qué puedes concluir de los anteriores resultados?**

Respuesta:

Toda división de dos números enteros, es decir fracción, tiene una expresión decimal finita o infinita periódica, y toda expresión decimal finita o infinita periódica se puede expresar en forma de fracción.

Determinando de esta manera todos los números racionales.

Explicación:

La operación $\sqrt{2} + 1/2$ implica un proceso infinito puesto que $\sqrt{2}$ es irracional, lo que equivale a que es un número cuya expresión decimal es infinita y no periódica, observe:

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1.414213562\ldots + 0.5 = 1.914213562\ldots$$

De acuerdo a la definición anterior este número $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional porque tiene infinitos decimales y no periódicos.

Ahora una mejor forma de ver que $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional:

Dado que todo número real o es racional, o es irracional, se puede demostrar la irracionalidad mostrando que no es racional. Para ello se supone que $\sqrt{2} + 1/2$ es racional, entonces:

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{m} \quad donde\ \ m\ y\ n\ son\ enteros,$$

Esta última ecuación implica que $\sqrt{2} = \frac{n}{m} - \frac{1}{2}$ y de acuerdo a las propiedades de los racionales, la suma (resta) de dos números racionales es racional, llegando a una contradicción pues $\sqrt{2}$ es irracional como ya se había demostrado. Por lo tanto $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ es irracional.

De esta misma manera se puede demostrar que la suma de $\sqrt{2}$ con cualquier racional de la forma n/m pertenece al conjunto de los números irracionales.

De igual manera se procede con la resta, la multiplicación y la división de un racional con $\sqrt{2}$ teniendo en cuenta las siguientes restricciones en la multiplicación y división:

La multiplicación de $0.\sqrt{2} = 0$ y 0 es racional.

No se puede dividir por 0 (cero) porque no está establecida debido a que todo número multiplicado por cero da cero.

Anexo 5

Raices Exactas

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{196} = 14$

¿Qué tienen en común estas raíces cuadradas?

Tienen en común que 4, 9, 64 y 196 son números cuadrados perfectos porque $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $64 = 8^2$ y $196 = 14^2$

La propiedad de los exponentes plantea lo siguiente:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por esta propiedad es que resulta:

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

De lo anterior se puede observar que entonces la raíz cuadrada de un número cuadrado perfecto es racional:

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

¿la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es racional, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{6}$ entre otros?

Raices Inexactas

Observe lo siguiente:

$\sqrt{4} = 2$ *porque* $2^2 = 4$

y ahora: $\sqrt{2} = ?$

Busquemos un número que al elevarlo al cuadrado de 2 es decir $n^2 = 2$

Por ejemplo:

$1^2 = 1$ ó $1.4^2 = 1.96$

$1.41^2 = 1.9881$ $1.42^2 = 2.0164$

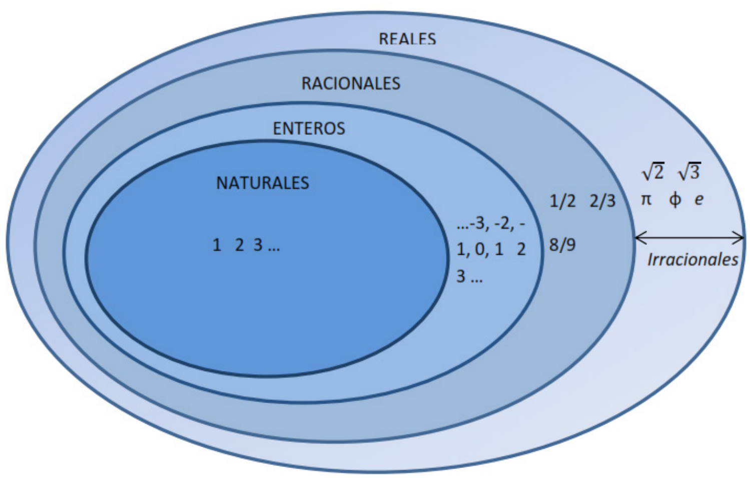
Esto quiere decir que el número que se busca está entre 1.41 y 1.42, pero observe que al elevar al cuadrado un numero con cifras decimales, estas se duplican, o sea que un número con tres cifras decimales al elevarlo al cuadrado tendrá seis cifras decimales y así sucesivamente, lo que deja ver que a medida que se tomen más cifras decimales se aproxima más a 2, pero nunca será igual.

Es por esta razón que cualquier raíz cuadrada $\sqrt{n}$ de un número *n*, que no es cuadrado perfecto, es irracional, porque no existe un numero racional que al elevarlo al cuadrado de exactamente *n*.

Anexo 6

[La idea es completar el diagrama ubicando el nombre del conjunto numérico adecuado (N: naturales, Z: enteros, Q: racionales, I: irracionales) en los espacios, de tal manera que al acertar con la letra aparezcan algunos números en el conjunto correspondientes a él, y una nube que muestre la característica de dicho conjunto pero que al dar click desaparezca solo la nube para darle continuidad a la siguiente]

El diagrama inicial se encuentra vacio, luego a medida que se va dando click se ira llenando hasta llegar al diagrama final que es:



Las nubes que presentan a cada conjunto dirán lo siguiente:

N: {son aquellos que se utilizan para contar}

Z: {es la ampliación de los naturales hacia los números negativos incluyendo al cero para establecer la propiedad de cerradura en las operaciones de suma y resta}

Q: {son aquellos que representan los cocientes entre dos números enteros}

I: {son aquellos que tienen infinitos decimales no periódicos}

Anexo 7

Señalar con una x si pertenece o no a cada conjunto numérico:

Número	N	Z	Q	I
-8				
$\sqrt{10}$				
5				
127				
-17				
36				
$\sqrt[3]{8}$				
$3\sqrt{2}$				
8,36				
$93,\overline{18}...$				
-5,21				
7,8				
$5+\sqrt{3}$				
-46				
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$				

Anexo 8

[La idea es presentar estas preguntas, y que al dar click sobre la última pregunta de paso a la solución que está más abajo]

- ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$?
- ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $nx - m = 0$ donde n y m son enteros y n es distinto de cero?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^2 - m = 0$ con m entero positivo?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^3 - m = 0$ con m entero positivo?

La solución general a la ecuación $nx - m = 0$ es:

$$x = \frac{m}{n}$$

La solución general a la ecuación $x^2 - m = 0$ es:

$$x = \sqrt[2]{m}$$

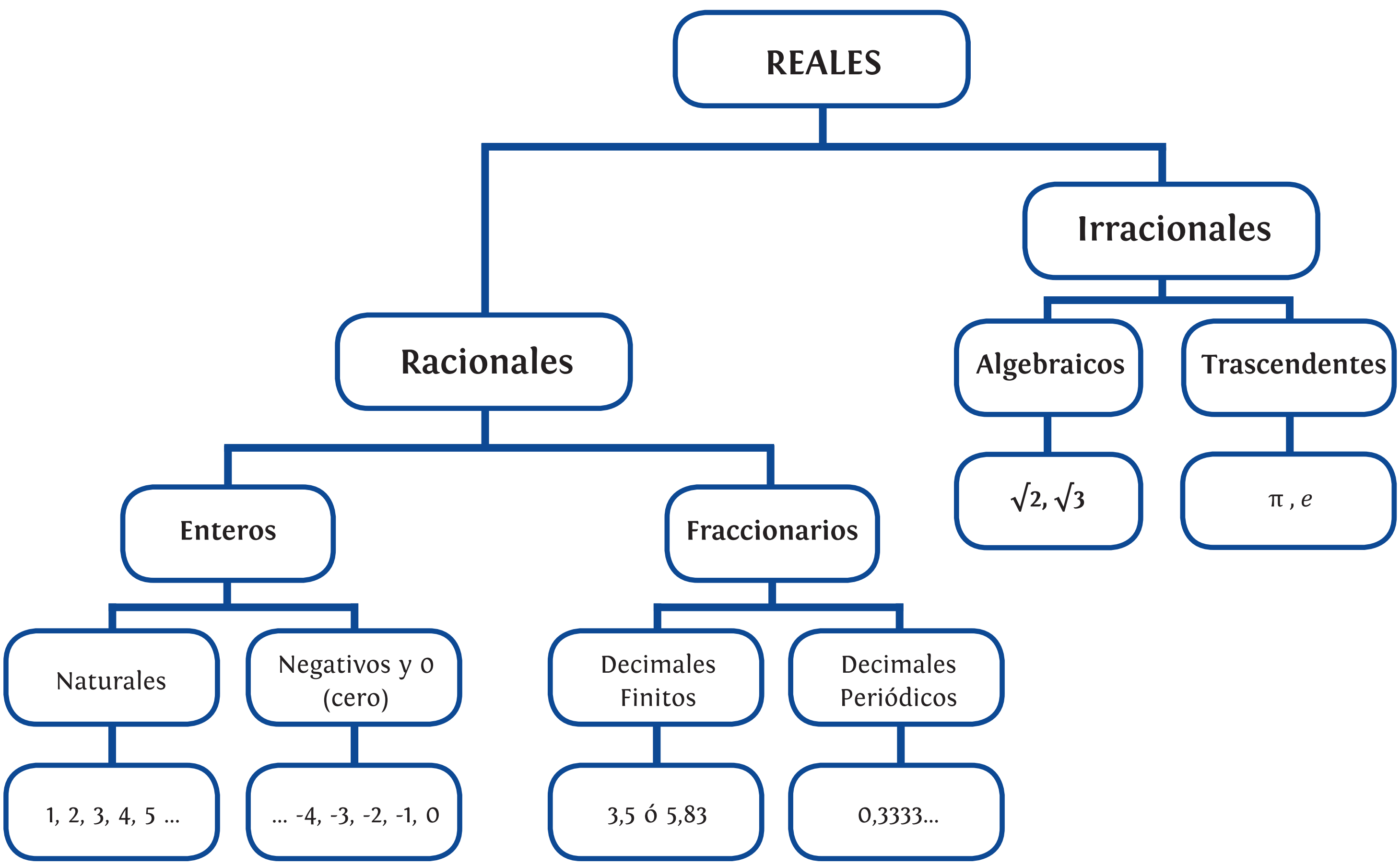
La solución general a la ecuación $x^3 - m = 0$ es:

$$x = \sqrt[3]{m}$$

De esto se puede concluir que todo número racional, toda raíz cuadrada de un entero positivo y toda raíz cúbica de un entero positivo son soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros.

Anexo 9

[La idea es que se vaya descubriendo paso a paso todo el diagrama desde abajo hacia arriba]



Si los números irracionales tienen infinitos decimales:

¿Cómo hago para sumar, restar, multiplicar o dividir números irracionales?

Para sumar o restar irracionales solo puedo hacerlo entre cantidades irracionales semejantes, utilizando el método de factor común, por ejemplo:

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$3\pi - 7\pi + 2\pi = 2\pi$$

Mientras que:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

No se puede resolver porque no tienen un factor común.

Para multiplicar o dividir irracionales se siguen las reglas del algebra, y en el caso de los irracionales con radicales se siguen las reglas de la radicación, observen algunos ejemplos:

$$e.4e^{2x+3} = 4e^{2x+4} \ \ con\ x \in Z$$

$$3\pi.7\pi^3 = 21\pi^4$$

para multiplicar irracionales con radicales existen muchos caminos:

$$\sqrt{3}.4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}.4\sqrt{3} = 4\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4.3 = 12$$

$$\sqrt{3}.4\sqrt{3} = 4.\left(\sqrt{3}.\sqrt{3}\right) = 4.\sqrt{3.3} = 4.\sqrt{9} = 4.3 = 12$$

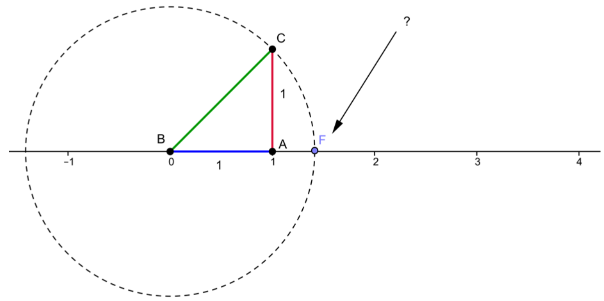
$$\sqrt{3}.4\sqrt{3} = \sqrt{3}.\sqrt{3.4^2} = \sqrt{3}.\sqrt{48} = \sqrt{3.48} = \sqrt{144} = 12$$

Cuando los radicales no tienen el mismo índice:

$$\sqrt[2]{5}.\sqrt[3]{6} = \sqrt[2.3]{5^3}.\sqrt[3.2]{6^2} = \sqrt[6]{125}.\sqrt[6]{36} = \sqrt[6]{125.36} = \sqrt[6]{4500}$$

Anexo 11

[La idea es que el recurso muestre la construcción paso a paso del número $\sqrt{2}$]



El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 1 y haciendo uso del teorema de Pitágoras se obtiene que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ así:

$$h^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow h^2 = 1^2 + 1^2$$
$$h^2 = 1 + 1 = 2 \longrightarrow h = \sqrt{2}$$

Luego se traza una circunferencia con centro en el origen y radio $AC = \sqrt{2}$ trasladando de esta manera la medida de $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica, ya que AE es radio de la misma circunferencia por tanto:

$$AC = AE = \sqrt{2}$$

Anexo 12

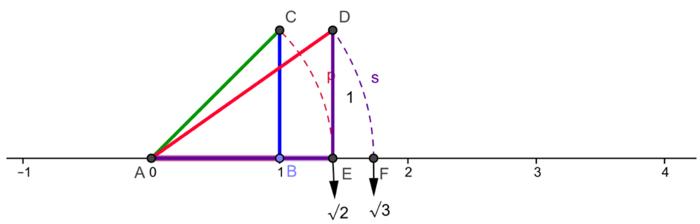
Si quiero construir $\sqrt{3}$ entonces

$$h = \sqrt{3} \longrightarrow h^2 = ? + ? = 3$$

$$h^2 = 2 + 1 = 3$$
$$h^2 = a^2 + b^2 = 3$$

es decir que $a^2 = 2$ *y* $b^2 = 1$
por lo tanto $a = \sqrt{2}$ *y* $b = 1$

Entonces si construyo un triángulo rectángulo similar al ejemplo de raíz de dos, pero cuyos catetos midan $\sqrt{2}$ y 1 obtengo la hipotenusa que mide $\sqrt{3}$ y luego con una circunferencia puedo trasladar la medida sobre la recta numérica.



Anexo 13

[La idea es que el material del estudiante tenga el ejemplo del anexo 12 y la gráfica de la recta numérica sin el eje y, 4 veces para que puedan trabajar en cada una un número por separado]