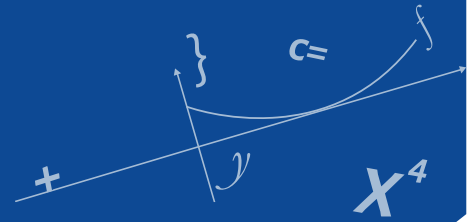


Caracterización de los números reales.



Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)

Grado: 8°

UoL_1: La recta numérica, un camino al estudio de los números reales.

LO_3: Descripción del conjunto de números racionales.

LO_4: Deducción de propiedades en las operaciones de números racionales.

LO_5: Identificación del conjunto de números irracionales.

LO_6: Identificación del conjunto de números reales.

Grado: 9°

UoL_1: Un conjunto numérico especial: los complejos.

LO_1: Identificación de los conjuntos de números racionales e irracionales.

Grado: 11°

UoL_1: Operando en el conjunto de los números reales.

LO_01: Construcción de los números naturales, enteros y racionales.

LO_02: Construcción de algunos números irracionales.

Materiales necesarios para la clase:




- Elementos para Dibujar (lápiz).
- Calculadora.

Objetivo de aprendizaje

Determinar el conjunto de los números reales a través de sus propiedades.

- Reconocer el conjunto de números reales a partir de procesos históricos.
- Reconoce los intervalos como conjuntos de números reales
- Caracterizar el conjunto de los números reales a partir de las propiedades de los racionales e irracionales

	<p>[SCO 2] Representa en semirrectas de intervalos.</p> <ol style="list-style-type: none"> 6. Interpreta la definición de intervalo real. 7. Identifica los tipos de intervalos (finitos, infinitos o semiinfinitos) y sus respectivas notaciones. 8. Relaciona la noción de continuidad con los intervalos reales 9. Representa en la recta intervalos reales <p>[SCO 3] Reconoce las propiedades de los números reales.</p> <ol style="list-style-type: none"> 10. Identifica los conjuntos numéricos a los que pertenece un determinado número real 11. Identifica los números reales como la unión entre el conjunto de los números racionales y de los números irracionales. 12. Ubica números reales en la recta numérica y los construye si es posible con regla y compás. 13. Realiza operaciones usuales entre números reales. 14. Utiliza herramientas tecnológicas para operar con números reales . 15. Reconoce las propiedades de la suma y el producto entre números reales. 16. Interpreta la propiedad distributiva como propiedad que relaciona suma y producto entre números reales.
<p>Fjujo de aprendizaje</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Introducción: Historia de los números reales 2. Objetivos de aprendizaje. 3. Contenido <ol style="list-style-type: none"> 3.1 Actividad 1: “Un tal David Hilbert”. 3.2 Actividad 2: ¿Cortaduras de quien? 3.3 Actividad 3: ¡A falta de una construcción tenemos muchas! 3.4 Actividad 4: Intervalos 4. Resumen 5. Tarea.
<p>Lineamientos evaluativos</p>	<p>Los estudiantes luego de realizar las actividades propuestas podrán dar características sobre las construcciones de los números reales propuestas por algunos matemáticos. Además estará en la capacidad de representar subconjuntos de números reales como intervalos, usando cualquiera de sus representaciones.</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p>Introducción</p> 	<p>Introducción</p>	<p>Línea del tiempo en la cual se mostraran históricamente el trabajo de varios matemáticos en la búsqueda de la formalización de los números reales. se hará énfasis en que históricamente se presenta la necesidad de definir el conjunto de los números reales, lo cual permite que se desarrollen y avancen diversos campos de las matemáticas.</p> <hr/> <p>Cada información que se dé debe ser inmediatamente retroalimentada por el docente, ya que existen términos que los estudiantes desconozcan o hechos históricos que valgan la pena ser puntualizados.</p>	<p>Recurso Interactivo</p> <p>Línea del tiempo con algunos hechos relevantes en la construcción del concepto de número real.</p> <hr/> <p>Material del estudiante</p> <p>Aparecerá una breve reseña sobre la historia de los números reales y se pedirá al estudiante que construya un glosario de la lectura y lo compare con el de sus compañeros.</p>
<p>Objetivos</p> 	<p>Objetivos</p>	<p>Objetivos de aprendizaje</p> <p>El docente, en compañía de los estudiantes, escribe los objetivos a los que creen que se debe llegar. Luego, el profesor presenta los objetivos propuestos para este objeto de aprendizaje. Es importante que el docente explique los objetivos propuestos, pues a partir de estos los estudiantes reconocerán lo que deben alcanzar finalizado el proceso enseñanza-aprendizaje.</p>	
<p>Contenido</p> 	<p>El docente prepara el tema</p>	<p>Basados en la línea del tiempo, la idea es que el docente profundice en algunos de los apartados de la línea del tiempo mostrada en la introducción.</p> <p>La diferencia es que en la introducción se mostraba la línea del tiempo en orden cronológico, acá, para profundizar en algunos temas se va mostrar en desorden y se empieza con Hilbert, luego se pasara Dedekind, después se abordaran a Cauchy y Weierstrass.</p>	<p>Recurso Interactivo.</p> <p>Se va mostrando la línea del tiempo, pero va apareciendo la información en el orden establecido anteriormente, de tal modo que no haya un orden cronológico. Se crean pop up en los cuales el estudiante va haciendo click</p>

Etapa	Flujo de aprendizaj	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Actividad 1. Caracterización axiomática de los reales “un tal David Hilbert“</p> <p>El docente dará una introducción a lo establecido por Hilbert y su caracterización axiomática de los reales, también conocido como método sintético.</p> <p>Para esto, el recurso servirá como apoyo visual, el cual dará información relevante sobre la época de Hilbert, además se enuncian los 10 axiomas y se dan ejemplos para estos, recalando que algunos de ellos ya los estudiantes los conocen.</p> <hr/> <p>Los axiomas de orden se pueden mencionar, pero no se profundizara en ellos ya que esto se trabajará en un LO posterior a este.</p> <p>El axioma de completez es esencial no mencionarlo formalmente, pero si mostrar su implicación mas relevante, la cual permite establecer una relación biunívoca entre los puntos de componen una recta y los números reales.</p> <p>Luego de la explicación se mostraran preguntas y ejercicios de suma y multiplicación relacionadas con los axiomas de cuerpo y otras propiedades aritméticas que se pueden deducir con dichos axiomas.</p>	<p>y va apareciendo más información relacionada con el hecho histórico, el personaje y el tema tratado.</p> <hr/> <p>Material del estudiante</p> <p>Descripciones del método y preguntas relacionadas con esto.</p>
		<p>Actividad 2. ¿Cortaduras de quien?</p> <p>El docente explica que Hilbert no fue el primero ni el ultimo que intento definir formalmente el conjunto de los números reales, y que entre las construcciones mas destacadas, por su simpleza y su economía estaba la de Richard Dedekind, quien define los reales como “cortaduras“.</p> <p>Para esta construcción, poco formal, es necesario que el docente pida a los</p>	

estudiantes que olviden por un momento todo lo que sepan sobre los números reales, para de este modo poder abordar esta y las demás construcciones.

El docente, con ayuda de un recurso que mostrara una recta numérica horizontal la cual se va a dividir en dos partes al definir un punto sobre esta, explicara que es una cortadura.

Ahora, consideremos que en dicha recta numérica solo están los puntos que representan a los racionales, es decir, es la recta numérica de los racionales. Supongamos que no sabemos que al estar solo los racionales en dicha recta esta no estaría “completa”. Un punto en la recta numérica divide a esta en dos subconjuntos de números racionales A y B, tales que todos los elementos de A son menores que todos los elementos de B y todos los elementos de B son mayores que todos los elementos de A.

Se dice que cada punto de una recta define una y solo una división de la recta. Dicho punto es un número real.

Dedekind llama cortadura a la separación de la recta en estos dos conjuntos A y B.

Luego de esta explicación, el docente muestra ejemplos de cortaduras racionales (es decir, las cortaduras que las define un punto que representa un número racional) e introduce notación de conjuntos necesaria para definir los conjuntos A y B.

Después de esto el docente, como ejercicio pide que los estudiantes construyan algunas cortaduras racionales.

Para finalizar, el docente propone las siguientes preguntas enfocadas a construir cortaduras que no son posibles construir con números racionales, pero que deben existir, ya que pertenecen a la recta.

Recurso interactivo.

Los números aparecen listados en la parte inferior, al dar clic estos irán al lugar indicado.

Etapa	Flujo de aprendizaj	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>¿Es posible construir una cortadura que defina los siguientes conjuntos $A=\{r \in \mathbb{Q} / r^2 < 2\}$ y $B=\{r \in \mathbb{Q} / r^2 > 2\}$?</p> <p>¿Quién es r? ¿Es r un número racional? Se espera que el estudiante deduzca que dicha cortadura no es definida por un número racional y que de este modo se pueden construir muchas otras cortaduras, de esta manera considera que se crea un nuevo tipo de número, un irracional.</p> <p>Dichas respuestas se consignaran en el material del estudiante y se socializaran con el fin de definir un número real como una cortadura.</p> <p>Además se menciona que existen tantas cortaduras como puntos en una recta y viceversa.</p>	
		<p>Actividad 3. ¡A falta de una construcción tenemos muchas!</p> <p>Algo sobre otras construcciones para los reales</p> <p>El docente, apoyado en el recurso interactivo el cual muestra algunas generalidades de las construcciones de Cauchy y Weierstrass permitiendo identificar conceptos matemáticos básicos para dichas construcciones.</p> <p>De Cauchy se destaca que utiliza sucesiones de números racionales que convergen en números irracionales y se muestra la serie que converge como ejemplo. (Se debe mencionar el significado de convergencia)</p> <p>Con la serie de se hacen las siguientes preguntas, cuyas respuesta deben ser consignadas en el material del estudiante.</p> <p>¿Cuáles son los siguientes 10 términos de la serie?</p>	<p>Interactivo.</p> <p>Aparece una recta numérica y al colocar el intervalo en el lugar adecuado este permanece de lo contrario</p>

Halla la suma de los primeros 4, 5 y 10 términos de la serie y compara dichos resultados con la expresión decimal de con 6 cifras decimales.

Weierstrass considera que un número racional puede ser expresado por la suma finita de otros racionales. En particular de racionales de la forma $1/n$. Resulta evidente que todo real tiene infinitas sumas racionales que lo representa. En el recurso se muestran ejemplos de varios racionales expresados como sumas de otros racionales, entre estos es necesario incluir números racionales en diversas representaciones.

Luego define que unos nuevos números, los cuales son expresados por una suma infinita de racionales de la forma $1/n$.

Luego de esto se propone un ejercicio, para que sea resuelto en el material del estudiante, en el cual se le dan varios números racionales y el estudiante debe encontrar tres formas de escribirlo como una suma finita de decimales de la forma $1/n$. Además, se pide que haga el mismo ejercicio con algunos irracionales conocidos, considerando sus primeras 6 cifras decimales. Por último se le pide que explique, con base en el ejercicio anterior, porque los irracionales serían sumas de infinitos racionales de la forma $1/n$.



Material del estudiante.

Contiene las preguntas, consignas y espacios para la realización de lo propuesto.

**Actividad 4.
Intervalos**

El docente explica lo que es un intervalo y los tipos de intervalo que hay, para esto, el recurso servirá como apoyo visual, mostrando gráficas de intervalos y las diversas formas en que se denotan.

Relacionándolo con todo lo anterior, es necesario hacer reflexionar a los estudiantes que sin los reales no se podría pensar en intervalos, para esto, el docente mostrara gráficamente “intervalos” definidos en los naturales, enteros y

Etapa	Flujo de aprendizaj	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>racionales, haciendo énfasis en que gracias a la definición de los irracionales y la unión con los racionales, la recta se completa y los intervalos serán continuos.</p> <p>Luego de esto se propone como ejercicio para resolver en el material del estudiante que se clasifique un conjunto de números reales y se da una serie de intervalos, en diversas representaciones, para que el estudiante cambie de representaciones.</p>	
<p>Resumen</p> 	<p>Conclusión y cierre</p>	<p>Actividad</p> <p>Como actividad de resumen se les pedirá a los estudiantes que enlisten cada uno de los temas tratados en el transcurso de la clase y que con estos relacionen palabras clave.</p> <p>Dichas palabras clave constituirán enriquecerán el glosario planteado en la introducción.</p>	<p>Recurso Interactivo</p> <p>Contendrá el espacio para que el estudiante enliste los temas tratados en el desarrollo de las actividades y las palabras clave que ayudaron a desarrollar cada tema.</p> <p>Material del estudiante.</p> <p>Aparecerá el espacio para que el estudiante realice la actividad de resumen.</p>
<p>Tarea</p> 	<p>Evaluación (post-clase)</p>	<p>Tarea</p> <p>Se pide que los estudiantes desarrollen las siguientes actividades de ampliación para mejorar su aprendizaje sobre los números reales.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Define en tus palabras los métodos de construcción de los reales de Hilbert, Cauchy, Dedekind y Weierstrass. Para esto, de ser necesario, consulta mas sobre cada uno de estos métodos y pide ayuda al docente de matemáticas con los términos desconocidos. 	

2. Expresa cada desigualdad con una notación de intervalo.
 - a. $-4 < x \leq 7$
 - b. $x < -3$
 - c. $3 \geq x \geq -1$
3. Muestra cada uno de los intervalos como una gráfica en la recta numérica.
 - a. $[-3, \infty)$
 - b. $(7/2, 14)$
 - c. $[0, 6.25]$
 - d. $(-\infty, 1)$
 - e. $(-2, 2]$