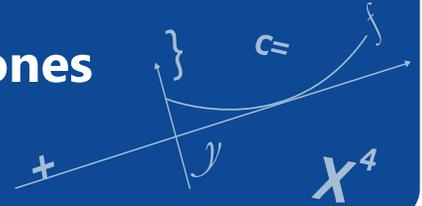


Caracterización de funciones polinómicas y racionales



Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)

Grado 11:

UoL_2: Las funciones, una forma de interpretar relaciones entre números reales.

LO_01: Caracterización de las funciones de variable real.

LO_02: Clasificación de funciones de variable real.

LO_03: Caracterización de los atributos de las funciones a través de comparaciones entre funciones.

Objetivos de aprendizaje

- Clasificar funciones de variable real de acuerdo a su estructura.
- Identificar funciones polinómicas.
- Identificar funciones polinómicas racionales.

Habilidad / Conocimiento (H/C)

SCO 1: Reconoce las funciones polinómicas.

- 1.1. Reconoce la definición de función polinómica.
- 1.2. Identifica funciones polinómicas analizando su gráfica.
- 1.3. Encuentra el dominio y el recorrido de funciones polinómicas.
- 1.4. Encuentra relaciones entre el grado de la función polinómica y los ceros del polinomio.
- 1.5. Grafica funciones polinómicas teniendo en cuenta crecimiento, decrecimiento y ceros del polinomio.

SCO 2: Identifica funciones polinómicas racionales

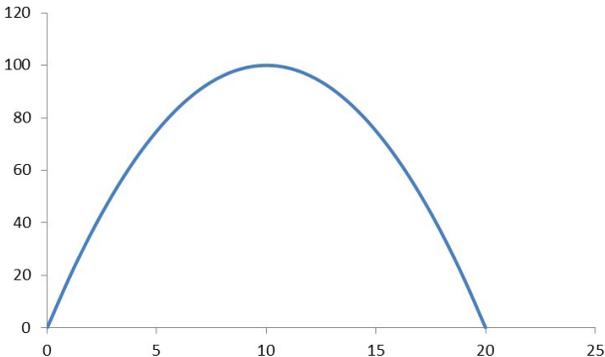
- 2.1. Identifica la función polinómica racional como un cociente entre polinomios.
- 2.2. Encuentra el dominio y el recorrido de funciones racionales.
- 2.3. Identifica intervalos de crecimiento y decrecimiento en una gráfica de un polinomio racional.
- 2.4. Grafica funciones polinómicas racionales teniendo en cuenta crecimiento, decrecimiento, ceros del polinomio y asíntotas.
- 2.5. Hace uso del algoritmo de la división para expresar una función racional como la suma de dos funciones.

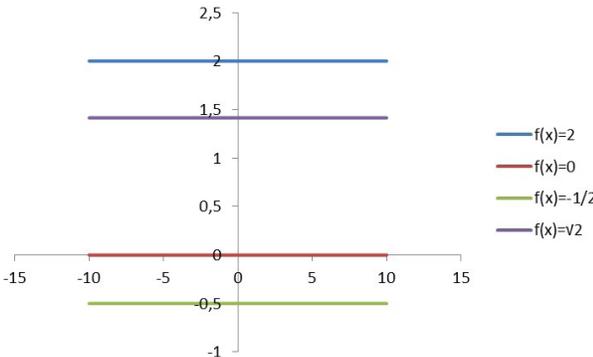
Flujo de aprendizaje

Introducción → Objetivos → Desarrollo → Resumen → Tarea

1. **Introducción:** Funciones en el fútbol y el espacio.
2. **Objetivos de aprendizaje**
3. **Desarrollo:**
 - 3.1. **Actividad 1:** Análisis de un tiro libre (H/C 1.1, H/C 1.2, H/C 1.3, H/C 1.4, H/C 1.5)
 - 3.2. **Actividad 2:** Funciones Polinómicas (H/C 2.1, H/C 2.2, H/C 2.3, H/C 2.4)

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p>Contenido</p> 	<p>El docente presenta el tema</p>	<p>Actividad 1: Análisis de un tiro libre (H/C 1.1, H/C 1.2, H/C 1.3, H/C 1.4, H/C 1.5)</p> <p>Posterior a la presentación de la primera animación, el docente debe socializar las preguntas al final de la misma:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿La trayectoria descrita por el balón que pasa por encima de una barrera en un tiro libre se puede ver en otras jugadas del partido? Dar algunos ejemplos. • ¿Cuál cree que es la mejor trayectoria que debe recorrer un balón para poder hacer un gol desde la mitad de campo? • ¿Se puede describir el tipo de trayectoria en un despeje de balón? • ¿Se puede ver este tipo de trayectorias en otros deportes? <hr/> <p>El docente muestra a los estudiantes varias imágenes en el recurso interactivo en donde se presenta la representación gráfica de las trayectorias de un balón en diferentes tiros libres, mostrando la posición inicial, final, altura máxima del balón, etc. Con estas gráficas el docente preguntara intervalos de crecimiento, dominio y recorrido, haciendo diferencia entre ellas dos.</p> <hr/> <p>Luego el docente dará algunas graficas polinómicas donde el estudiante debe hacer un análisis similar a las anteriores gráficas. Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, dominio y recorrido, etc.</p> <p>Una vez realizado este trabajo el docente mostrará la definición de función polinómica y sus comportamientos.</p> <hr/> <p>Definición 1: Un función de una sola variable se dice polinómica si es de la forma:</p> $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + x^n$ <p>Donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$</p>	<p>Recurso Interactivo</p> <p>Material del estudiante</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>El dominio de un función polinómica son todos los números reales y el recorrido depende del n que se maneje, por ejemplo, si n es un número impar el recorrido son todos los números reales.</p> <p>En el caso de lanzamientos de tiros libres, el polinomio que describe su trayectoria es de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ donde $n = 2$ y $a_2 < 0$</p> <p>Usando estos ejemplos se puede dar la siguiente definición sobre el grado y los ceros de un polinomio.</p> <hr/> <p>Definición 2: El grado de un polinomio $grad(f)$ es igual al mayor exponente n que se encuentra en la variable, por ejemplo en la función $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ se dice que es de grado dos, $f(x) = a_0 + a_1x$ es de grado uno y $f(x) = a_0$ es de grado cero.</p> <hr/> <p>Definición 3: Los ceros de un polinomio, o de una función, son los valores que puede tomar la variable de tal manera que la función se hace cero, es decir, $f(x) = 0$ en el ejemplo del tiro libre $f(x)$ es cero en el inicio de la trayectoria y cuando el balón vuelve a tocar el suelo.</p> 	

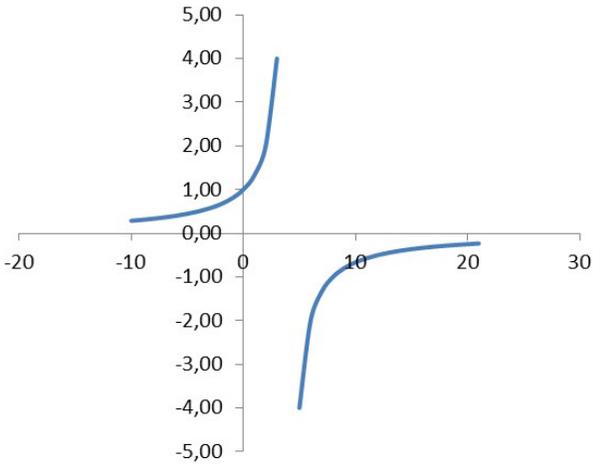
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Actividad 2: Funciones polinómicas (H/C 1.1, H/C 1.2, H/C 1.3, H/C 1.4, H/C 1.5)</p> <p>Finalmente el docente presenta las formas básicas de funciones polinómicas de grado cero, uno, dos y tres y explica que las de mayor grado tendrán un comportamiento similar a estas primera funciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> Polinomio de grado cero: Es un polinomio de la forma $f(x) = a_0$ donde $a_0 \in \mathbb{R}$, es decir es una función constante. Algunos ejemplos son: $f(x) = 2$ $f(x) = 0$ $f(x) = -1/2$ $f(x) = \sqrt{2}$ 	<p>Recurso Interactivo</p> <p>Material del estudiante</p>
		<ul style="list-style-type: none"> Polinomio de grado uno: Es un polinomio de la forma $f(x) = a_0 + a_1x$ donde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, es decir es una función representada por una línea recta. Algunos ejemplos son: $f(x) = 2 + 3x$ $f(x) = 2x$ $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ 	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<div data-bbox="565 205 1177 577" data-label="Figure"> </div> <hr/> <ul data-bbox="565 625 1177 903" style="list-style-type: none"> • Polinomio de grado dos: Es un polinomio de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, es decir es una función cuadrática. Tiene dos formas básicas, cóncava hacia arriba si $a_2 > 0$ o cóncava hacia abajo $a_2 < 0$, en otras palabras, abre hacia arriba o abre hacia abajo: <div data-bbox="565 934 1177 1291" data-label="Figure"> </div> <hr/> <ul data-bbox="565 1344 1177 1522" style="list-style-type: none"> • Polinomio de grado tres: Es un polinomio de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ donde $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, es decir es una función cúbica. Las siguientes son las cuatro formas básicas de esta función. <div data-bbox="625 1543 1088 1942" data-label="Figure"> </div>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<div data-bbox="639 226 1097 625" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="639 659 1097 1058" data-label="Figure"> </div> <div data-bbox="639 1117 1097 1516" data-label="Figure"> </div>	
		<p data-bbox="565 1623 1170 1692">Una vez expuestas las gráficas se preguntara a los estudiantes lo siguientes.</p> <ul data-bbox="565 1728 1101 1864" style="list-style-type: none"> • ¿Qué tipo de polinomio modela la trayectoria de un tiro libre? • ¿Qué tipo de función modela la trayectoria de un pase corto? 	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>ACTIVIDAD 3: Mirar con lupa – Funciones polinómicas racionales (H/C 2.1, H/C 2.2, H/C 2.3, H/C 2.4)</p> <p>En una segunda animación se muestra una lupa y como se puede aumentar el tamaño de la imagen dependiendo de la distancia a la que se encuentra dicha lente, explicando que esta relación se puede encontrar usando un tipo muy especial de polinomios llamadas racionales.</p>	<p>Animación</p> <p>Recurso interactivo</p> <p>Material del estudiante</p> <p>Una lupa</p>
		<p>Posterior a la presentación de la segunda animación, el docente debe socializar las preguntas al final de la misma:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Al acercar una lupa a una imagen ¿Qué pasa con la imagen? • ¿Qué pasa con la imagen al alejarla? • ¿Qué pasa si se acerca mucho la lupa a la imagen? • ¿Qué pasa con la imagen si la lupa de aleja mucho? • ¿En algún punto del espacio no hay imagen? • ¿En algún punto del espacio la imagen es lo muy grande? • ¿en algún punto del espacio la imagen se invierte? <p>Para dar respuesta a las preguntas se solicita a los estudiantes utilizar una lupa en una imagen o palabra y realizar también, por si mismos, la actividad.</p>	
		<p>El docente presentará un recurso interactivo donde ayudara a los estudiantes a resolver estas dudas e introducirá el concepto de polinomio racional.</p>	
		<p>Definición 4: Un función se dice polinomio racional si es un polinomio dividido entre polinomio, es decir, si es de la forma:</p> $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ <p>Teniendo en cuenta que $p_2(x) \neq 0$</p>	

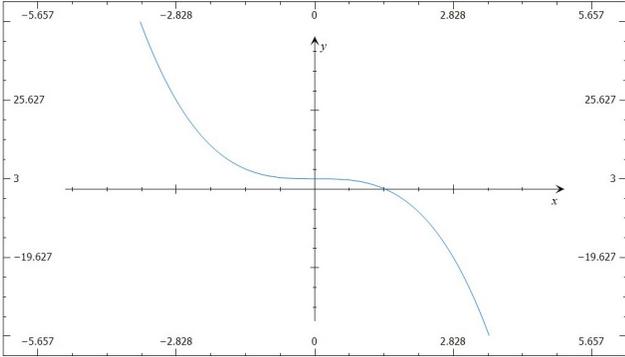
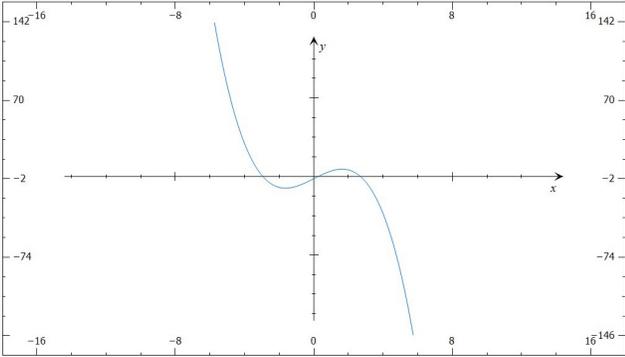
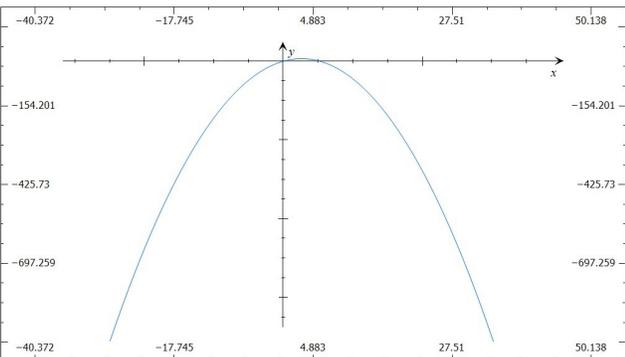
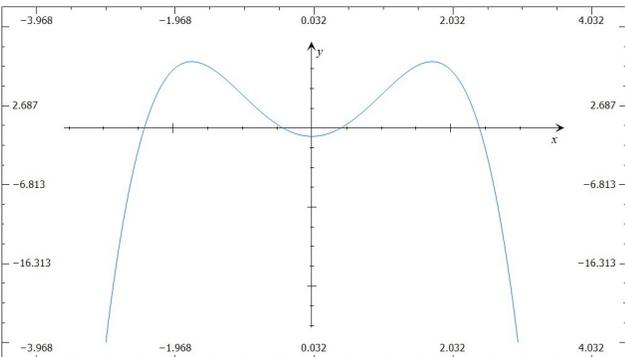
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados																																												
		<p>Para entender esta definición se usará la función $f(x) = \frac{4}{4-x}$ la cual modela el tamaño de la imagen vista con una lupa dependiendo de la distancia de la lupa. La restricción $p(x) \neq 0$ nos indica que el dominio de un polinomio racional son todos los números reales exceptuando aquellos valores donde el polinomio del denominador se hace cero, es decir, se deben suprimir los ceros del polinomio $p(x)$</p> <p>Una vez explicado esto el estudiante dará muchos valores tanto positivos como negativos para graficar la función $f(x) = \frac{4}{4-x}$ y encontrará el dominio que para este caso son todos los números reales excepto cuando $4-x=0$, es decir, excepto $x=4$</p> <table border="1" data-bbox="678 877 1073 1900"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x) = \frac{4}{4-x}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-10</td><td>0,29</td></tr> <tr><td>-9</td><td>0,31</td></tr> <tr><td>-8</td><td>0,33</td></tr> <tr><td>-7</td><td>0,36</td></tr> <tr><td>-6</td><td>0,40</td></tr> <tr><td>-5</td><td>0,44</td></tr> <tr><td>-4</td><td>0,50</td></tr> <tr><td>-3</td><td>0,57</td></tr> <tr><td>-2</td><td>0,67</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0,80</td></tr> <tr><td>0</td><td>1,00</td></tr> <tr><td>1</td><td>1,33</td></tr> <tr><td>2</td><td>2,00</td></tr> <tr><td>3</td><td>4,00</td></tr> <tr><td>4</td><td>División por 0</td></tr> <tr><td>5</td><td>-4,00</td></tr> <tr><td>6</td><td>-2,00</td></tr> <tr><td>7</td><td>-1,33</td></tr> <tr><td>8</td><td>-1,00</td></tr> <tr><td>9</td><td>-0,80</td></tr> <tr><td>10</td><td>-0,67</td></tr> </tbody> </table>	x	$f(x) = \frac{4}{4-x}$	-10	0,29	-9	0,31	-8	0,33	-7	0,36	-6	0,40	-5	0,44	-4	0,50	-3	0,57	-2	0,67	-1	0,80	0	1,00	1	1,33	2	2,00	3	4,00	4	División por 0	5	-4,00	6	-2,00	7	-1,33	8	-1,00	9	-0,80	10	-0,67	
x	$f(x) = \frac{4}{4-x}$																																														
-10	0,29																																														
-9	0,31																																														
-8	0,33																																														
-7	0,36																																														
-6	0,40																																														
-5	0,44																																														
-4	0,50																																														
-3	0,57																																														
-2	0,67																																														
-1	0,80																																														
0	1,00																																														
1	1,33																																														
2	2,00																																														
3	4,00																																														
4	División por 0																																														
5	-4,00																																														
6	-2,00																																														
7	-1,33																																														
8	-1,00																																														
9	-0,80																																														
10	-0,67																																														

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		 <p data-bbox="557 726 1187 867">En este ejercicio se puede encontrar los intervalos de crecimiento, también pueden analizar que si se pasa de una distancia de cuatro la imagen se invierte.</p>	
		<p data-bbox="557 932 1062 1003">Actividad 4: Dividiendo polinomios (H/C 2.5)</p> <p data-bbox="557 1037 1179 1209">El docente debe presentar en un recurso interactivo un repaso del algoritmo de división para números enteros, recordando la forma no abreviada de hacerlo, por ejemplo: $345 \div 7$</p> $\begin{array}{r} 34'5 \quad \quad 7 \\ \underline{-28} \\ 6 \end{array}$ <p data-bbox="716 1243 1156 1346">Se debe buscar un número que multiplicado por 7 de 34 o próximo a 34</p> $\begin{array}{r} 34'5 \quad \quad 7 \\ \underline{-28} \\ 6 \end{array}$ <p data-bbox="716 1415 1099 1482">Se hace la resta dentro del cuadro.</p> $\begin{array}{r} 34'5 \quad \quad 7 \\ \underline{-28} \\ 6 \end{array}$ <p data-bbox="716 1623 1170 1690">Se baja la siguiente cifra, 5, y se continúa con el proceso</p> $\begin{array}{r} 34'5 \quad \quad 7 \\ \underline{-28} \\ 65 \\ \underline{-63} \\ 2 \end{array}$ <p data-bbox="716 1759 1136 1827">Un número que multiplicado por 7 dé 65 o próximo a 65.</p>	<p data-bbox="1203 936 1446 963">Recurso interactivo</p> <p data-bbox="1203 1003 1495 1031">Material del estudiante</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Finalmente tenemos que $345 \div 7 = 49 + \frac{2}{7}$ que se conoce como número mixto $\left(49\frac{2}{7}\right)$</p> <p>Una vez mostrado el recurso de repaso usa el mismo proceso para dividir polinomios.</p> <hr/> <p>Sugerencia: Para para hacer el proceso de división más sencillo se debe organizar cada polinomio involucrado del grado mayor al grado menor y si hace falta algún exponente insertar el cero como coeficiente.</p> <hr/> <p>Ejercicio</p> <p>Dividir $x^4 - 3x^2 + x^3 - 6$ entre $x + x^2 - 1$</p> <p>En este caso los dos polinomios están en desorden; al organizarlos quedan $x^4 + x^3 - 3x^2 - 6$ y $x^2 + x - 1$, pero al primer polinomio le falta el termino correspondiente a x así que se le agrega el coeficiente cero y queda $x^4 + x^3 - 3x^2 + 0x - 6$ Este proceso se le conoce como proceso de completado de polinomios.</p> <p>Con ayuda de los estudiantes y de un recurso interactivo se resolverá el ejercicio paso a paso como el ejemplo de repaso.</p> <p>$x^4 + x^3 - 3x^2 + 0x - 6 \mid \begin{array}{l} x^2 + x - 1 \\ x^2 \end{array}$ Buscar un valor tal que al multiplicar x^2 de x^4</p> <p>Se hace la operación término a término teniendo cuidado con los signos y se baja la cifra siguiente.</p> $\begin{array}{r} x^4 + x^3 - 3x^2 + 0x - 6 \mid \begin{array}{l} x^2 + x - 1 \\ x^2 \end{array} \\ -x^4 - x^3 + x^2 \\ \hline 0 + 0 - 2x^2 \end{array}$	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>De nuevo, se busca un valor de tal manera que multiplicado con x^2 de $-2x^2$</p> $\begin{array}{r l} x^4 + x^3 - 3x^2 + 0x - 6 & x^2 + x - 1 \\ -x^4 - x^3 + x^2 & \\ \hline 0 + 0 - 2x^2 & \end{array}$ <p>Se hace la operación término a término teniendo cuidado con los signos y se baja la cifra siguiente.</p> $\begin{array}{r l} x^4 + x^3 - 3x^2 + 0x - 6 & x^2 + x - 1 \\ -x^4 - x^3 + x^2 & \\ \hline 0 + 0 - 2x^2 + 0x - 6 & \\ & 2x^2 + 2x - 3 \\ \hline & 0 + 2x - 9 \end{array}$ <p>Como ya no se puede dividir $2x$ entre x^2 la división termina.</p> <p>El resultado es:</p> $\frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 6}{x^2 + x - 1} = x^2 - 2 + \frac{2x - 9}{x^2 + x - 1}$	
		<p>Actividad 5: Instructivo de excel para graficar funciones polinómicas (H/C 1.1, H/C 1.2, H/C 1.3, H/C 1.4, H/C 1.5, H/C 2.1, H/C 2.2, H/C 2.3, H/C 2.4)</p> <p>El docente presenta el instructivo para graficar funciones polinómicas en Excel y orienta al estudiante para la construcción de otras funciones dadas en material del estudiante. Analizan, de forma grupal, el comportamiento de las mismas y determinan gráficamente su dominio y codominio.</p> <p>El propósito es que el estudiante evidencie las características de las funciones y su comportamiento a partir del grado de las mismas.</p>	<p>Recurso Interactivo</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p>Resumen</p> 	<p>Resumen</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. El docente presenta un recurso interactivo en el que muestra de manera incompleta la caracterización de las funciones polinomiales. A través del recurso educativo de completar el texto con las palabras dadas, el propósito es que el estudiante retome las definiciones dadas en el transcurso de las actividades y formalice los conceptos adquiridos. 2. Dadas las siguientes afirmaciones diga si son verdaderas usando definiciones o argumentos válidos o refute usando algún ejemplo. <ul style="list-style-type: none"> • Existen funciones racionales donde el dominio son todos los reales. (V) • El recorrido de los polinomios son todos los números reales. (F) • Una función racional es la división de dos polinomios cualquiera. (F) • La función racional $\frac{p(x)}{p(x)}$ tiene dominio todos los reales excepto los ceros del polinomio $p(x)$. (F) • El grado de un polinomio depende de los ceros del mismo. (F) • El número de ceros de un polinomio depende del grado del mismo. (V) <p>A través de esta actividad, los estudiantes recuerdan los temas trabajados en clase, y afianzan los conocimientos expuestos para la construcción de polinomios e identificar su comportamiento en diferentes intervalos. También se observan definiciones equivalentes a las trabajadas en clase, y se puede observar si los estudiantes pueden determinarlas como tal.</p>	<p>Recurso Interactivo</p> <p>Material del estudiante</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
Tarea 	Tarea	1. Dadas las siguientes graficas identificar el grado del polinomio. <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;">     </div>	Recurso interactivo Material del estudiante

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>2. Hallar el dominio de las siguientes funciones, identifique el tipo de función, racional o no, el grado de cada polinomio, los ceros de la función y use tabulación en un intervalos de menos 20 a 20 usando espacios de 0,5.</p> <p>a. $f(x) = x^2 - 3x + 1$</p> <p>b. $f(x) = 2x + \frac{3}{x-1}$</p> <p>c. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x}$</p> <p>d. $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$</p> <p>e. $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$</p>	