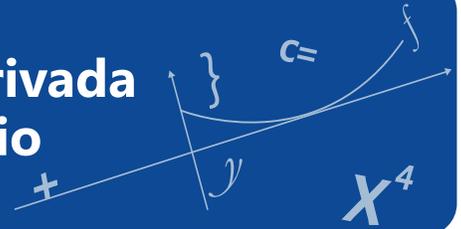


# Interpretación de la derivada en situaciones de cambio y variación



Recursos de aprendizaje relacionados (Pre clase)

Grado 11:

UoL\_03: Conoce el cambio en un instante y describe la situación.

LO\_04: Cálculo del valor de un límite mediante el uso de las propiedades de límites.

LO\_05: Reconoce el cambio instantáneo como la derivada de la función.

LO\_06: Interpretación del concepto de la primera y segunda derivada para analizar el comportamiento de las funciones.

Objetivos de aprendizaje

- Encontrar relaciones cuantificables entre la noción de derivada y situaciones de variación en el entorno.
- Determinar modelos adecuados que se ajusten a situaciones de cambio.
- Apropiar reglas de cálculo alternativas para encontrar límites.

Habilidad / Conocimiento (H/C)

**SCO 1: Relaciona la derivada con problemas de la vida cotidiana.**

- 1.1. Identifica situaciones cotidianas de cambio cuantitativo y constante.
- 1.2. Reconoce situaciones de variación asociadas al tiempo.
- 1.3. Determina cambios constantes en funciones de variable real.
- 1.4. Modela situaciones de variación mediante funciones de variable real.
- 1.5. Reconoce la derivada como una razón de cambio instantánea.
- 1.6. Interpreta la derivada como una velocidad instantánea.
- 1.7. Interpreta la segunda derivada como una aceleración.
- 1.8. Resuelve problemas de optimización haciendo uso de las derivadas.
- 1.9. Explica soluciones a problemas de razón de cambio y optimización mediante modelos geométricos.

**SCO 2: Usa la regla de L'Hopital para calcular límites.**

- 2.1. Realiza cambio de variable en el límite a cero e infinito.
- 2.2. Determina la convergencia de numerador y denominador de una función racional.
- 2.3. Encuentra la derivada n-ésima de una función de variable real.
- 2.4. Identifica funciones derivables en una función racional
- 2.5. Identifica funciones racionales de la forma  $0/0$  e  $\infty/\infty$
- 2.6. Usa el teorema de L'Hopital para encontrar la convergencia del límite.

Flujo de aprendizaje	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <b>Introducción:</b> Montaña Rusa</li> <li>2. <b>Objetivos de aprendizaje</b></li> <li>3. <b>Desarrollo:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>3.1. <b>Actividad 1:</b> Análisis de una montaña rusa (H/C 1.1, H/C 1.2, H/C 1.3, H/C 1.4 H/C 1.5 H/C 1.6 H/C 1.7)</li> <li>3.2. <b>Actividad 2:</b> Velocidad de una montaña rusa (H/C 1.8, H/C 1.9)</li> <li>3.3. <b>Actividad 3:</b> Aplicaciones en la vida cotidiana (H/C 1.1 H/C 1.2, H/C 1.3 H/C 1.4 H/C 1.5 H/C 1.6 H/C 1.7 H/C 1.8 H/C 1.9)</li> <li>3.4. <b>Actividad 4:</b> Regla de L'Hopital (H/C 2.1, H/C 2.2, H/C 2.3, H/C 2.4, H/C 2.5, H/C 2.6)</li> </ol> </li> <li>4. <b>Resumen:</b> Sopa de letras</li> <li>5. <b>Tarea</b></li> </ol>
Lineamientos evaluativos	Los estudiantes, a través de situaciones contextualizadas conceptualizan los comportamientos de una función y la importancia del análisis de gráficas para el desarrollo de diferentes ciencias.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<b>Introducción</b>  	<b>Introducción</b>	<p><b>Introducción: Montaña Rusa</b></p> <p>El docente presenta una animación de un parque de diversiones, donde aparece un grupo de amigos en una montaña rusa, se buscará que los estudiantes entiendan el concepto de posición, velocidad y aceleración.</p> <p>Al finalizar la animación, y con base en conocimientos previos de física, se presentan unas preguntas que deben ser resueltas en el material del estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Qué es una velocidad promedio? Rta/ Es la diferencia de posición que ocupa un cuerpo en dos instantes diferentes y el tiempo transcurrido entre ellos</li> <li>2. ¿Con esta información puede calcular velocidades promedios en intervalos diferentes de tiempos? Rta/ No porque no hay suficientes datos.</li> <li>3. ¿Qué es una aceleración promedio? Rta/ el cambio promedio de rapidez en un determinado intervalo de tiempo</li> <li>4. ¿Hay suficiente información para calcular alguna aceleración promedio? Rta/ No porque no hay suficientes datos.</li> </ol>	<p>Animación Material del estudiante</p> <p>Recurso Interactivo Material del estudiante</p>

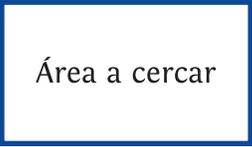
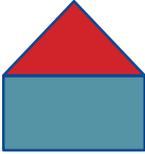
Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p>Objetivos</p> 		<p><b>Objetivos de aprendizaje</b></p> <p>El docente, en compañía de los estudiantes, escribe los objetivos a los que creen que se debe llegar.</p> <p>Luego, el docente presenta los objetivos propuestos para este objeto de aprendizaje. El docente puede explicar los objetivos si lo cree necesario y/o conveniente.</p>	
<p>Contenido</p> 	<p>El docente presenta el tema</p>	<p><b>Actividad 1: Análisis de una montaña rusa (H/C 1.1, H/C 1.2, H/C 1.3, H/C 1.4, H/C 1.5, H/C 1.6, H/C 1.7)</b></p> <p>Posterior a la presentación de la animación, el docente debe socializar las preguntas al final de la misma:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Si se encuentra en la cima de una montaña rusa y miras hacia un lado ¿Qué sucede con el paisaje? Rta/ Se ve que pasa rápidamente evidenciándose la velocidad.</li> <li>¿Qué siente una vez inicia el descenso? Rta/ Se siente vacío en el estómago por la aceleración</li> <li>Durante el descenso ¿Qué cambio experimentas respecto a la altura? Rta/ Se pasa de una posición más alta a una más baja</li> <li>¿Qué sucede con las alturas una vez termina el descenso e inicia un ascenso? Rta/ Se pasa de una posición más baja a una más alta</li> </ol> <p>Luego de que los estudiantes respondan las preguntas en grupo, el docente escucha las respuestas de los diferentes grupos y guiará la discusión hacia la definición de velocidad y aceleración, donde también se mostrará la definición usando derivadas.</p>	<p>Recurso interactivo Material del estudiante</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p><b>Posición</b></p> <p>Es la ubicación en un lugar de algún objeto. (Dado un punto de referencia podemos medir la posición de algún objeto, es decir que, la posición se mide en unidades de longitud). El docente indicará varios puntos en la cual se mostrará la posición del carro de la montaña rusa, explicando que se puede modelar como una función de variable real, por ejemplo <math>f(t) = -3t^3 + 2t^2 + 5t</math> recordando que el dominio debe ser <math>t \geq 0</math> ya que el tiempo no es negativo.</p>	
		<p><b>Velocidad</b></p> <p>La velocidad es un cambio de posición en un determinado tiempo. Ahora imagine algo más pequeño que medio segundo. Al cambio de posición en esa fracción de segundo se le llama velocidad instantánea. La velocidad es la razón de cambio de la posición respecto al tiempo, por tanto podemos decir que es la derivada de la distancia con respecto al tiempo. El docente mostrará diferentes cambios de posición en momentos diferentes hasta llegar a un cambio tan pequeño, menor a medio segundo, para explicar la velocidad, luego toma la función de la posición, la deriva y explica que esto muestra que tan rápido se mueve en carro en un tiempo determinado.</p> $f'(t) = -9t^2 + 4t + 5$	
		<p><b>Aceleración</b></p> <p>Cuando hay un cambio de velocidad se dice que hay una aceleración. La aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo, por tanto podemos decir que es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Si el tiempo en el cambio de la velocidad es muy pequeño, imagine algo mucho más</p>	<p>Recurso interactivo Material del estudiante</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>pequeño que medio segundo. Entonces se dice que hay una aceleración instantánea. Finalmente muestra la segunda derivada de la posición, que en consecuencia es la primera derivada de la velocidad para mostrar la aceleración.</p> $f''(t) = -18t + 4$	
		<p>En el material del estudiante, teniendo en cuenta la animación, el estudiante hará varias tasas de cambio, cada vez con intervalos de tiempo más pequeños, así encontrando la velocidad y la aceleración en tiempos específicos.</p>	
		<p><b>ACTIVIDAD 2: Velocidad máxima de un carro de montaña rusa (H/C 1.8, H/C 1.9)</b></p> <p>El docente presenta en el recurso interactivo un ejercicio de aplicación que le permitirá al estudiante resolver problemas de optimización.</p>	
		<p><b>Ejercicio 1</b></p> <p>En la montaña rusa se ha encontrado la velocidad del carro en cualquier instante con la función:</p> $velocidad = v = f'(t) = -9t^2 + 4t + A$ <p>Ahora los estudiantes deben encontrar el valor del tiempo para el cual se obtiene la velocidad máxima. Para esto los estudiantes deben hacer la gráfica de la función usando tabulación y además usando los criterios de la primera y segunda derivada.</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• La gráfica de la función es:           <div style="text-align: center;"> </div> </li> <li>• Se recuerda al estudiante que para encontrar el máximo o mínimo de alguna función se debe:           <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calcular la primera derivada de la función: <math>v' = -18t + 4</math></li> <li>2. Mirar los puntos de discontinuidad de la función derivada, si los hay. En el ejercicio no los hay.</li> <li>3. Igualar a cero la derivada de la función <math>v' = 0</math>, es decir <math>-18t + 4 = 0</math></li> <li>4. Despejar el valor de <math>t</math>. <math>-18t = -4</math> luego <math>t = -4/-18</math> y simplificando <math>t = 2/9 \approx 0.2222</math>. El valor de <math>t</math> indica que a los 0.2222 <b>[unidades de tiempo]</b> se alcanza una velocidad máxima o mínima.</li> <li>5. Se calcula la segunda derivada para confirmar si es un máximo o un mínimo: <math>v'' = -18</math></li> <li>6. Se sustituye en la segunda derivada el valor de <math>t</math> obtenido el paso [4] y se observa el signo resultante. Si el signo es positivo, el valor obtenido en el paso [4] es un mínimo; si el signo es negativo, el valor obtenido en el paso [4] es un máximo, para nuestro caso tenemos que es negativo (-18) por lo tanto es un máximo.</li> <li>7. Para obtener la velocidad máxima (máximo o mínimo) se debe sustituir el valor obtenido en el paso [4] en la función de velocidad original, es decir, <math>v = -9t^2 + 4t + 5</math>, haciendo los calculo, se obtiene:               <math display="block">v = -9 * \left(-\frac{2}{9}\right)^2 + 4 * \left(-\frac{2}{9}\right) + 5 = 41/9 \approx 4.55555</math> </li> </ol> </li> </ul>	<p>Recurso interactivo Material del estudiante</p>

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>que se interpreta como:</p> <p>la velocidad máxima de carro de la montaña rusa es 4.55555 [unidades de velocidad]</p>	
		<p><b>Actividad 3: Aplicaciones en la vida cotidiana (H/C 1.1, H/C 1.2, H/C 1.3, H/C 1.4, H/C 1.5, H/C 1.6, H/C 1.7, H/C 1.8, H/C 1.9)</b></p> <p>Luego, el docente en compañía de los estudiantes, plantea problemas de optimización (en contexto)</p>	
		<p><b>Ejemplo 1</b></p> <p>El primer ejemplo es de un campesino que quiere cercar una parte de sus terrenos en forma rectangular pero sólo cuenta con 4200 metros de cerca.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para obtener un área máxima?</li> <li>• ¿Cuál es el área del terreno cercada?</li> </ul>	
		<p>El docente preguntará a los estudiantes que es perímetro y área. Luego, en conjunto con los estudiantes, desarrollará el siguiente ejercicio:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El perímetro de una figura es la medida o longitud del contorno de cualquier figura plana.</li> </ul> <div data-bbox="615 1478 1138 1591" style="border: 2px solid orange; width: 322px; height: 54px; margin: 10px 0;"></div> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El área de una figura es la medida de la superficie dentro de un contorno de una figura plana. En la figura el área es la parte azul.</li> </ul> <div data-bbox="615 1785 1138 1898" style="border: 2px solid orange; width: 322px; height: 54px; background-color: #003366; margin: 10px 0;"></div>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>Una vez establecido lo que es un área y un perímetro se debe establecer cómo solucionar el problema.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Graficar la situación. Estableciendo medidas tanto conocidas como desconocida asignando variable, por ejemplo <math>x</math> para la base, <math>y</math> para la profundidad y <math>A</math> para el área.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><b>Área:</b> base por altura</p> $A = x * y$ <p style="text-align: center;"><b>Perímetro:</b> suma de sus lados</p> $4200 = 2x + 2y$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin: 20px 0;"> <div style="text-align: center;"> <p><math>y</math></p>  <p><math>x</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar la función objetivo, es decir, la función a optimizar. Para este caso <math>A</math>.</li> <li>Usar la información del problema para eliminar todas las variables a excepción de una en la función objetivo. Para este ejercicio tenemos que el perímetro es de 4200 y es igual a la suma de dos veces la base más dos veces la profundidad del terreno, es decir, <math>4200 = 2x + 2y</math> y despejando una variable, la que crea conveniente, en este caso <math>y</math>, tenemos <math>y = 2100 - x</math>. Ahora se sustituye en la función objetivo <math>A = x * y = x (2100 - x)</math>  <math display="block">A = 2100x - x^2</math> </li> <li>Hallar su derivada y sus valores críticos.</li> </ul> $A' = 2100 - 2x$ <p>Valor crítico <math>A' = 0</math> entonces <math>x = 1050</math></p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Decidir si es un máximo o un mínimo. En algunas ocasiones, debido a la naturaleza del problema si solo se halla un valor, éste ya es la respuesta.</li> </ul> <p>Finalmente la conclusión es:</p> <p>La base del terreno <math>x</math> debe medir 1050 metros, la profundidad del terreno y debe medir 1050 metros y el área total cercada es <math>1050 * 1050 = 1102500</math> metros cuadrados.</p>	<p>Recurso interactivo Material del estudiante</p>
		<p><b>Actividad 4: Regla de L'Hopital (H/C 2.1, H/C 2.2, H/C 2.3, H/C 2.4, H/C 2.5, H/C 2.6)</b></p> <p>El docente presenta en el recurso interactivo cuatro ejemplos de límites de funciones que no se pueden realizar algebraicamente. Esto para que el estudiante entienda la aplicabilidad de la regla de L'Hopital.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Regla de L'Hopital</b></li> </ul> <p>Si el límite de una función racional es de la forma <math>0/0</math> o <math>\infty/\infty</math> se puede recurrir a las derivadas tanto del numerador como el del denominador para quitar esta <i>indeterminación</i>.</p> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	
		<p><b>Ejemplo 1</b></p> <p>Dada la función:</p> $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ <p>se quiere ver su comportamiento cerca de cero. Al hacer un análisis se puede encontrar que tanto el numerador como el denominador son casi cero, lo que lleva a una indeterminación, por tal razón, <b>usando la regla de L'Hopital</b>, se puede encontrar un mejor análisis de esta situación</p>	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$ <p>Así, se puede afirmar que la función</p> $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ <p>tiende a cero cuando se aproxima a cero.</p>	
		<p><b>Ejemplo 2</b></p> <p>Ahora se va a analizar la función <math>f(x) = e^x/x^2</math> pero cuando <math>x</math> toma valores muy grandes, es decir, cuando <math>x</math> tiende al infinito. En este caso, tanto el numerador como el denominador tienden a infinito, pero si hacemos el mismo análisis <b>con la regla de L'Hopital</b> aplicada dos veces se obtiene:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$ <p>Por tal razón se puede <b>asegurar</b> que la función tiende a infinito cuando <math>x</math> tiende a infinito.</p>	
		<p><b>Ejemplo 3</b></p> <p>Este ejemplo ilustrará donde <b>no</b> se debe usar la regla de L'Hopital.</p> <p>Dada la función <math>f(x) = \sin x/e^x</math> se quiere hacer un análisis cuando se está cerca de cero, es decir, cuando <math>x</math> tienda a cero. Si observamos el numerador, <math>\sin x</math> tiende a cero a medida que <math>x</math> tiende a cero, pero el denominador tiende a uno a medida que <math>x</math> tiende a cero, por tal razón <b>la regla de L'Hopital no es aplicable</b> y el límite se puede calcular directamente:</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x} = \frac{\sin 0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$ <p>¿Qué pasa si se aplica la regla de L'Hopital?</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = \frac{1}{1} = 1$	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
<p><b>Resumen</b></p> 	<p><b>Resumen</b></p>	<p><b>Sopa de Letras</b></p> <p>El docente presenta en pantalla la siguiente sopa de letras:</p> <table border="1" data-bbox="565 380 1177 898"> <tr><td>D</td><td>D</td><td>H</td><td>R</td><td>L</td><td>O</td><td>A</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>H</td><td>C</td><td>Z</td><td>I</td><td>M</td><td>U</td><td>J</td><td>Q</td><td>U</td><td>Ñ</td><td>Q</td><td>O</td><td>A</td><td>A</td><td>S</td><td>ACELERACION</td></tr> <tr><td>C</td><td>X</td><td>T</td><td>E</td><td>W</td><td>E</td><td>M</td><td>C</td><td>Ñ</td><td>U</td><td>D</td><td>I</td><td>I</td><td>M</td><td>Z</td><td>B</td><td>N</td><td>Y</td><td>O</td><td>Z</td><td>I</td><td>Ñ</td><td>T</td><td>P</td><td>Z</td><td>CAMBIO</td></tr> <tr><td>F</td><td>Y</td><td>K</td><td>Ñ</td><td>N</td><td>B</td><td>I</td><td>O</td><td>D</td><td>I</td><td>V</td><td>E</td><td>R</td><td>S</td><td>I</td><td>D</td><td>A</td><td>D</td><td>H</td><td>N</td><td>Ñ</td><td>M</td><td>V</td><td>M</td><td>T</td><td>DERIVADA</td></tr> <tr><td>Y</td><td>Z</td><td>K</td><td>O</td><td>C</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>H</td><td>U</td><td>L</td><td>B</td><td>N</td><td>B</td><td>D</td><td>I</td><td>L</td><td>O</td><td>E</td><td>U</td><td>J</td><td>F</td><td>T</td><td>S</td><td>Q</td><td>FUNCION</td></tr> <tr><td>A</td><td>G</td><td>G</td><td>Y</td><td>M</td><td>R</td><td>B</td><td>P</td><td>D</td><td>R</td><td>Y</td><td>U</td><td>H</td><td>R</td><td>V</td><td>S</td><td>G</td><td>D</td><td>M</td><td>S</td><td>Z</td><td>O</td><td>K</td><td>X</td><td>U</td><td>INTERVALO</td></tr> <tr><td>G</td><td>L</td><td>Z</td><td>R</td><td>A</td><td>L</td><td>N</td><td>P</td><td>U</td><td>R</td><td>Ñ</td><td>Y</td><td>G</td><td>O</td><td>A</td><td>Y</td><td>U</td><td>E</td><td>U</td><td>K</td><td>X</td><td>H</td><td>D</td><td>C</td><td>Ñ</td><td>LHOPITAL</td></tr> <tr><td>H</td><td>N</td><td>P</td><td>L</td><td>M</td><td>X</td><td>D</td><td>I</td><td>I</td><td>I</td><td>I</td><td>C</td><td>Y</td><td>E</td><td>T</td><td>C</td><td>B</td><td>P</td><td>X</td><td>D</td><td>H</td><td>Y</td><td>G</td><td>X</td><td>E</td><td>LIMITE</td></tr> <tr><td>H</td><td>F</td><td>B</td><td>C</td><td>W</td><td>A</td><td>R</td><td>E</td><td>A</td><td>N</td><td>A</td><td>T</td><td>U</td><td>R</td><td>A</td><td>L</td><td>P</td><td>R</td><td>O</td><td>T</td><td>E</td><td>G</td><td>I</td><td>D</td><td>A</td><td>MAXIMO</td></tr> <tr><td>Q</td><td>Y</td><td>D</td><td>B</td><td>J</td><td>O</td><td>K</td><td>P</td><td>A</td><td>Y</td><td>L</td><td>T</td><td>P</td><td>C</td><td>V</td><td>L</td><td>A</td><td>P</td><td>T</td><td>W</td><td>D</td><td>G</td><td>O</td><td>E</td><td>V</td><td>MINIMO</td></tr> <tr><td>M</td><td>V</td><td>V</td><td>X</td><td>M</td><td>G</td><td>A</td><td>S</td><td>E</td><td>S</td><td>D</td><td>E</td><td>I</td><td>N</td><td>V</td><td>E</td><td>R</td><td>N</td><td>A</td><td>D</td><td>E</td><td>R</td><td>O</td><td>K</td><td>Q</td><td>OPTIMIZACION</td></tr> <tr><td>U</td><td>K</td><td>P</td><td>Z</td><td>X</td><td>F</td><td>N</td><td>O</td><td>D</td><td>I</td><td>U</td><td>O</td><td>J</td><td>L</td><td>X</td><td>P</td><td>Y</td><td>B</td><td>C</td><td>K</td><td>Y</td><td>Z</td><td>J</td><td>D</td><td>V</td><td>POSICION</td></tr> <tr><td>J</td><td>I</td><td>M</td><td>W</td><td>C</td><td>V</td><td>C</td><td>H</td><td>O</td><td>Ñ</td><td>Ñ</td><td>M</td><td>V</td><td>K</td><td>H</td><td>H</td><td>H</td><td>I</td><td>G</td><td>R</td><td>B</td><td>Z</td><td>B</td><td>R</td><td>TASA</td></tr> <tr><td>M</td><td>B</td><td>B</td><td>F</td><td>S</td><td>M</td><td>N</td><td>R</td><td>H</td><td>A</td><td>D</td><td>V</td><td>Y</td><td>Q</td><td>D</td><td>F</td><td>P</td><td>L</td><td>L</td><td>S</td><td>O</td><td>O</td><td>V</td><td>C</td><td>J</td><td>VELOCIDAD</td></tr> <tr><td>P</td><td>Ñ</td><td>A</td><td>I</td><td>M</td><td>H</td><td>U</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>M</td><td>C</td><td>R</td><td>K</td><td>O</td><td>H</td><td>T</td><td>D</td><td>O</td><td>M</td><td>Z</td><td>K</td><td>J</td><td>V</td><td>K</td><td></td></tr> <tr><td>M</td><td>V</td><td>P</td><td>L</td><td>Y</td><td>I</td><td>B</td><td>B</td><td>D</td><td>B</td><td>I</td><td>G</td><td>P</td><td>T</td><td>U</td><td>O</td><td>A</td><td>L</td><td>E</td><td>P</td><td>Ñ</td><td>L</td><td>R</td><td>Ñ</td><td>T</td><td></td></tr> <tr><td>H</td><td>G</td><td>A</td><td>U</td><td>L</td><td>W</td><td>I</td><td>O</td><td>N</td><td>K</td><td>X</td><td>H</td><td>R</td><td>R</td><td>H</td><td>C</td><td>B</td><td>X</td><td>N</td><td>E</td><td>X</td><td>A</td><td>N</td><td>Z</td><td>A</td><td></td></tr> <tr><td>K</td><td>J</td><td>Z</td><td>C</td><td>O</td><td>E</td><td>O</td><td>X</td><td>O</td><td>Ñ</td><td>K</td><td>W</td><td>S</td><td>F</td><td>K</td><td>H</td><td>Z</td><td>P</td><td>O</td><td>X</td><td>O</td><td>D</td><td>Y</td><td>T</td><td>R</td><td></td></tr> <tr><td>I</td><td>Z</td><td>C</td><td>R</td><td>N</td><td>Ñ</td><td>A</td><td>Ñ</td><td>C</td><td>A</td><td>S</td><td>R</td><td>C</td><td>O</td><td>Ñ</td><td>I</td><td>Ñ</td><td>B</td><td>F</td><td>O</td><td>X</td><td>H</td><td>E</td><td>I</td><td>Y</td><td></td></tr> <tr><td>A</td><td>I</td><td>F</td><td>T</td><td>V</td><td>P</td><td>N</td><td>E</td><td>F</td><td>N</td><td>Y</td><td>H</td><td>J</td><td>R</td><td>P</td><td>V</td><td>P</td><td>S</td><td>G</td><td>Ñ</td><td>E</td><td>Q</td><td>H</td><td>Z</td><td>Y</td><td></td></tr> <tr><td>Y</td><td>P</td><td>A</td><td>R</td><td>G</td><td>O</td><td>N</td><td>Z</td><td>A</td><td>O</td><td>N</td><td>O</td><td>P</td><td>F</td><td>T</td><td>A</td><td>W</td><td>M</td><td>R</td><td>S</td><td>G</td><td>Y</td><td>Ñ</td><td>A</td><td>O</td><td></td></tr> <tr><td>H</td><td>L</td><td>Ñ</td><td>Z</td><td>S</td><td>E</td><td>R</td><td>V</td><td>I</td><td>C</td><td>I</td><td>O</td><td>A</td><td>M</td><td>B</td><td>I</td><td>E</td><td>N</td><td>T</td><td>A</td><td>L</td><td>Z</td><td>L</td><td>A</td><td>J</td><td></td></tr> <tr><td>V</td><td>K</td><td>X</td><td>M</td><td>M</td><td>P</td><td>P</td><td>M</td><td>B</td><td>P</td><td>E</td><td>G</td><td>M</td><td>S</td><td>Y</td><td>I</td><td>H</td><td>I</td><td>X</td><td>W</td><td>P</td><td>Z</td><td>Y</td><td>Ñ</td><td>D</td><td></td></tr> <tr><td>S</td><td>Ñ</td><td>Y</td><td>J</td><td>Ñ</td><td>U</td><td>R</td><td>X</td><td>V</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>J</td><td>K</td><td>S</td><td>A</td><td>U</td><td>N</td><td>E</td><td>N</td><td>W</td><td>L</td><td>Ñ</td><td>Y</td><td>S</td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td>H</td><td>P</td><td>R</td><td>X</td><td>E</td><td>A</td><td>I</td><td>P</td><td>M</td><td>I</td><td>L</td><td>A</td><td>I</td><td>G</td><td>O</td><td>L</td><td>O</td><td>N</td><td>C</td><td>E</td><td>T</td><td>L</td><td>L</td><td>Y</td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td>X</td><td>V</td><td>L</td><td>K</td><td>P</td><td>Ñ</td><td>N</td><td>F</td><td>M</td><td>C</td><td>F</td><td>P</td><td>O</td><td>Ñ</td><td>J</td><td>T</td><td>S</td><td>Ñ</td><td>T</td><td>V</td><td>N</td><td>F</td><td>Z</td><td>G</td><td></td></tr> </table> <p>A través de esta actividad, los estudiantes recuerdan los temas y palabras claves trabajados en clase y afianzan los conocimientos expuestos para la construcción de funciones e identificar su comportamiento en diferentes intervalos. También se observan definiciones equivalentes a las trabajadas en clase, y se puede observar si los estudiantes pueden determinarlas como tal.</p>	D	D	H	R	L	O	A	V	V	V	H	C	Z	I	M	U	J	Q	U	Ñ	Q	O	A	A	S	ACELERACION	C	X	T	E	W	E	M	C	Ñ	U	D	I	I	M	Z	B	N	Y	O	Z	I	Ñ	T	P	Z	CAMBIO	F	Y	K	Ñ	N	B	I	O	D	I	V	E	R	S	I	D	A	D	H	N	Ñ	M	V	M	T	DERIVADA	Y	Z	K	O	C	M	E	S	H	U	L	B	N	B	D	I	L	O	E	U	J	F	T	S	Q	FUNCION	A	G	G	Y	M	R	B	P	D	R	Y	U	H	R	V	S	G	D	M	S	Z	O	K	X	U	INTERVALO	G	L	Z	R	A	L	N	P	U	R	Ñ	Y	G	O	A	Y	U	E	U	K	X	H	D	C	Ñ	LHOPITAL	H	N	P	L	M	X	D	I	I	I	I	C	Y	E	T	C	B	P	X	D	H	Y	G	X	E	LIMITE	H	F	B	C	W	A	R	E	A	N	A	T	U	R	A	L	P	R	O	T	E	G	I	D	A	MAXIMO	Q	Y	D	B	J	O	K	P	A	Y	L	T	P	C	V	L	A	P	T	W	D	G	O	E	V	MINIMO	M	V	V	X	M	G	A	S	E	S	D	E	I	N	V	E	R	N	A	D	E	R	O	K	Q	OPTIMIZACION	U	K	P	Z	X	F	N	O	D	I	U	O	J	L	X	P	Y	B	C	K	Y	Z	J	D	V	POSICION	J	I	M	W	C	V	C	H	O	Ñ	Ñ	M	V	K	H	H	H	I	G	R	B	Z	B	R	TASA	M	B	B	F	S	M	N	R	H	A	D	V	Y	Q	D	F	P	L	L	S	O	O	V	C	J	VELOCIDAD	P	Ñ	A	I	M	H	U	T	M	E	M	C	R	K	O	H	T	D	O	M	Z	K	J	V	K		M	V	P	L	Y	I	B	B	D	B	I	G	P	T	U	O	A	L	E	P	Ñ	L	R	Ñ	T		H	G	A	U	L	W	I	O	N	K	X	H	R	R	H	C	B	X	N	E	X	A	N	Z	A		K	J	Z	C	O	E	O	X	O	Ñ	K	W	S	F	K	H	Z	P	O	X	O	D	Y	T	R		I	Z	C	R	N	Ñ	A	Ñ	C	A	S	R	C	O	Ñ	I	Ñ	B	F	O	X	H	E	I	Y		A	I	F	T	V	P	N	E	F	N	Y	H	J	R	P	V	P	S	G	Ñ	E	Q	H	Z	Y		Y	P	A	R	G	O	N	Z	A	O	N	O	P	F	T	A	W	M	R	S	G	Y	Ñ	A	O		H	L	Ñ	Z	S	E	R	V	I	C	I	O	A	M	B	I	E	N	T	A	L	Z	L	A	J		V	K	X	M	M	P	P	M	B	P	E	G	M	S	Y	I	H	I	X	W	P	Z	Y	Ñ	D		S	Ñ	Y	J	Ñ	U	R	X	V	S	S	A	J	K	S	A	U	N	E	N	W	L	Ñ	Y	S		C	H	P	R	X	E	A	I	P	M	I	L	A	I	G	O	L	O	N	C	E	T	L	L	Y		C	X	V	L	K	P	Ñ	N	F	M	C	F	P	O	Ñ	J	T	S	Ñ	T	V	N	F	Z	G		<p>Recurso interactivo Material del estudiante</p>
D	D	H	R	L	O	A	V	V	V	H	C	Z	I	M	U	J	Q	U	Ñ	Q	O	A	A	S	ACELERACION																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
C	X	T	E	W	E	M	C	Ñ	U	D	I	I	M	Z	B	N	Y	O	Z	I	Ñ	T	P	Z	CAMBIO																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
F	Y	K	Ñ	N	B	I	O	D	I	V	E	R	S	I	D	A	D	H	N	Ñ	M	V	M	T	DERIVADA																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
Y	Z	K	O	C	M	E	S	H	U	L	B	N	B	D	I	L	O	E	U	J	F	T	S	Q	FUNCION																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
A	G	G	Y	M	R	B	P	D	R	Y	U	H	R	V	S	G	D	M	S	Z	O	K	X	U	INTERVALO																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
G	L	Z	R	A	L	N	P	U	R	Ñ	Y	G	O	A	Y	U	E	U	K	X	H	D	C	Ñ	LHOPITAL																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
H	N	P	L	M	X	D	I	I	I	I	C	Y	E	T	C	B	P	X	D	H	Y	G	X	E	LIMITE																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
H	F	B	C	W	A	R	E	A	N	A	T	U	R	A	L	P	R	O	T	E	G	I	D	A	MAXIMO																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
Q	Y	D	B	J	O	K	P	A	Y	L	T	P	C	V	L	A	P	T	W	D	G	O	E	V	MINIMO																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
M	V	V	X	M	G	A	S	E	S	D	E	I	N	V	E	R	N	A	D	E	R	O	K	Q	OPTIMIZACION																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
U	K	P	Z	X	F	N	O	D	I	U	O	J	L	X	P	Y	B	C	K	Y	Z	J	D	V	POSICION																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
J	I	M	W	C	V	C	H	O	Ñ	Ñ	M	V	K	H	H	H	I	G	R	B	Z	B	R	TASA																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
M	B	B	F	S	M	N	R	H	A	D	V	Y	Q	D	F	P	L	L	S	O	O	V	C	J	VELOCIDAD																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
P	Ñ	A	I	M	H	U	T	M	E	M	C	R	K	O	H	T	D	O	M	Z	K	J	V	K																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
M	V	P	L	Y	I	B	B	D	B	I	G	P	T	U	O	A	L	E	P	Ñ	L	R	Ñ	T																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
H	G	A	U	L	W	I	O	N	K	X	H	R	R	H	C	B	X	N	E	X	A	N	Z	A																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
K	J	Z	C	O	E	O	X	O	Ñ	K	W	S	F	K	H	Z	P	O	X	O	D	Y	T	R																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
I	Z	C	R	N	Ñ	A	Ñ	C	A	S	R	C	O	Ñ	I	Ñ	B	F	O	X	H	E	I	Y																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
A	I	F	T	V	P	N	E	F	N	Y	H	J	R	P	V	P	S	G	Ñ	E	Q	H	Z	Y																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
Y	P	A	R	G	O	N	Z	A	O	N	O	P	F	T	A	W	M	R	S	G	Y	Ñ	A	O																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
H	L	Ñ	Z	S	E	R	V	I	C	I	O	A	M	B	I	E	N	T	A	L	Z	L	A	J																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
V	K	X	M	M	P	P	M	B	P	E	G	M	S	Y	I	H	I	X	W	P	Z	Y	Ñ	D																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
S	Ñ	Y	J	Ñ	U	R	X	V	S	S	A	J	K	S	A	U	N	E	N	W	L	Ñ	Y	S																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
C	H	P	R	X	E	A	I	P	M	I	L	A	I	G	O	L	O	N	C	E	T	L	L	Y																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
C	X	V	L	K	P	Ñ	N	F	M	C	F	P	O	Ñ	J	T	S	Ñ	T	V	N	F	Z	G																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
<p><b>Tarea</b></p> 	<p><b>Tarea</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Se quiere cercar un lote rectangular de 800 metros cuadrados de área. Si uno de los lados está sobre la orilla de un río: <b>¿Cuáles son las dimensiones del lote para que la longitud de la cerca sea mínima?</b></li> <li>Hallar los siguientes límites: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}</math></li> </ul> </li> </ol>	<p>Recurso interactivo Material del estudiante</p>																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza / Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
		<p>3. Sobre una banda transportadora está cayendo arena formando un montón en forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montón es tres veces la altura: <b>¿A qué ritmo cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?</b></p>	