

Materia Matemáticas	Grado 9	Unidad de aprendizaje Extrayendo información de nuestro entorno. El análisis de tablas y gráficos.
-------------------------------	-------------------	---



Título del objeto de aprendizaje	Identificación de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones en las ciencias
---	--

Objetivos de aprendizaje	1. Reconocer los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones <ul style="list-style-type: none"> • Reconocer los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones, argumentando la practicidad de cada uno respecto de los otros.
---------------------------------	--

Habilidad/ conocimiento	SCO1. Deducción de propiedades de las igualdades <ol style="list-style-type: none"> 1.1 Determina los gráficos de cada una de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones. 1.2 Investiga los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones. 1.3 Propón situaciones que se podrían ajustar a un sistema de ecuaciones dado. 1.4 Propón un sistema de ecuaciones cuya solución sea un punto dado. 1.5 Argumenta cuándo es preferible un método a otro, cuando se pretende solucionar un sistema de ecuaciones.
--------------------------------	--

Flujo de aprendizaje	<p>Introducción. Los sistemas de ecuaciones y las ciencias</p> <p>Objetivos</p> <p>Actividad 1. Relacionando gráficos y sistemas de ecuaciones</p> <p>Actividad 2. Reconociendo la pertinencia del uso de un método</p> <p>Actividad 3. Consulta</p> <p>Resumen tareas</p>
-----------------------------	--

Guía de valoración	El estudiante estará en condiciones de proponer un sistema de ecuaciones a partir de un gráfico reconociendo el intercepto en y, en x, la pendiente o el punto de corte entre dos rectas. Además, podrá relacionar un sistema de ecuaciones dado con un gráfico que lo representa. También será capaz de plantear un problema dado el gráfico de un sistema de ecuaciones.
---------------------------	--

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
Introducción 	Introducción	<p>El docente presenta un video, cuyo nombre es Los sistemas de ecuaciones y la ciencia, en el cual se plantea un problema que involucra variables relacionadas con la física, y que puede ser representado por un sistema de ecuaciones, cuya solución se realiza utilizando dos métodos.</p> <p>A partir del video, el docente solicita a los estudiantes responder, en el Material del estudiante, un par de preguntas.</p>	Recurso 1: (animación) Material del estudiante Recurso 2: Recurso interactivo Material del estudiante
Desarrollo 	El docente presenta el tema	<p>Actividad 1. Relacionando gráficos y sistemas de ecuaciones (1.1;1.3;1.4)</p> <p>Ejercicio 1</p> <p>El docente presenta tres gráficas para que el estudiante, a partir de estas, deduzca los sistemas de ecuaciones que se ajustan a ellas. Para ello debe asignarle a cada sistema la letra del gráfico que le corresponde, así:</p> <p>El gráfico a presenta dos rectas que se cortan en el punto $(6, 1)$ y una recta tiene intercepto con el eje y en el punto $(0, 5)$ y la otra en el punto $(0, -3)$.</p> <p>El gráfico b presentan dos rectas que se cortan en el punto $(6, 4)$ y una recta pasa por el punto $(3, 7)$ y la otra tiene intercepto en el eje y en el punto $(0, -2)$.</p> <p>El gráfico c presenta dos rectas que se cortan en el punto $(2, -2)$ y una recta tiene intercepto con el eje y en el punto $(0, -1)$ y la otra en el punto $(0, -5)$.</p> <p>Como en una de las situaciones se menciona un sistema relacionado con la demanda y la oferta, se da una corta reseña de oferta, demanda y punto de equilibrio, así:</p> <p>Para la siguiente actividad conozcamos algunos conceptos básicos de economía ya que en una de las situaciones a tratar se menciona esta temática: Tanto en la demanda como en la oferta se relacionan cantidades de un producto que lo denotamos por (q) y el precio (p).</p> <p>Demanda De la demanda (comprar) es normal que en el mercado al aumentar los precios el consumidor demande menos, es decir, compre menos. Por el contrario, si los precios bajan el consumidor se motiva a comprar más. Por lo anterior, su gráfico es una línea decreciente de izquierda a derecha y normalmente se presenta p en el eje y y q en el eje x.</p>	Recurso 3 y 4: Interactivo Emparejamiento de gráficas en el plano y un contexto dado Paso a paso para presentar el método gráfico

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Desarrollo



El docente presenta el tema

Oferta

De la oferta (ofrecer) se puede decir que trata de la relación entre el precio y la cantidad de artículos que los productores están dispuestos a ofrecer a cierto precio.

Ante un aumento de los precios de los productos los productores se motivan a fabricar más, y ante una disminución del precio de los productos se disminuye la producción. Por tal motivo la curva de la oferta es creciente de izquierda a derecha.

Punto de equilibrio

Si trazamos en un mismo plano ambas gráficas el punto de corte de estas es el punto de equilibrio de la oferta y la demanda, en este punto las cantidades que los compradores quieren adquirir es igual con las cantidades ofrecidas por los productores.

. Para los siguientes sistemas asigna el gráfico que les corresponde, y responde las demás preguntas que se formulan para uno de los sistemas ecuaciones.

A) La oferta y la demanda de un producto están expresadas en el siguiente sistema de ecuaciones:

ecuación 1: $\frac{2}{3}p+q=5$ **ecuación 2:** $-\frac{2}{3}p+q=0$;

donde q representa las cantidades ofrecidas o demandadas y p el precio.

R/ Gráfico que le corresponde: R/ a

Y con base el sistema de ecuaciones y la gráfica, responde:

- ¿Cuál es el ecuación de oferta y cuál es la de demanda?

R/ la ecuación 1 de la demanda y ecuación 2 de la oferta.

- En qué punto se genera el equilibrio entre la oferta y la demanda (indica el valor de cada variable en dicho punto) e interpreta dicho punto, en el Material del estudiante.

R/ cuando el precio es $p=1$ y las cantidades son $q=6$, y significa que a un precio de \$1, tanto oferentes como demandantes están dispuestos a vender y comprar 6 unidades.

B) Se necesita conocer el área de un terreno rectangular para construir, y solo se sabe que su perímetro esta expresado por $2x+2y=20$ y el ancho excede al largo en 2m $x= y+2$.

R/ Gráfico que le corresponde: R/ b

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Desarrollo



El docente presenta el tema

C) Dos submarinos han colisionado, y describen una trayectoria dada por las rectas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t+x &= -1 \\ \frac{-3}{2}t+x &= -5 \end{aligned}$$

Donde t representa el tiempo y x el desplazamiento.

R/ Gráfico que le corresponde: R/ c

Ejercicio 2

En este ejercicio el docente solicita a los estudiantes graficar y plantear el sistema de ecuaciones para dos situaciones, partiendo de unas condiciones dadas.

Antes de esto y para claridad del estudiante, el docente plantea un ejemplo y lo desarrolla paso a paso, y solicita a los estudiantes que, en el Material del estudiante, describa lo que se hace en cada paso.

Observa cómo se desarrolla el siguiente ejemplo y describe en el Material del estudiante lo que se hace en cada paso.

Se interceptan en el punto (2,3) la pendiente de una recta es $\frac{3}{2}$ y la otra tiene intercepto en el eje y en -1

Proceso

Para trazar la recta cuya pendiente es $\frac{3}{2}$:

- Se ubica el punto donde se cortan ambas rectas, es decir el punto (2, 3).
- A partir del punto de corte, nos desplazamos tres unidades hacia arriba y dos unidades hacia la derecha, datos que corresponden con lo que indica la pendiente, lo cual da el punto (4, 6).
- Se traza una recta que pase o contenga los dos puntos conocidos, la cual tiene pendiente $m = \frac{3}{2}$ e intercepto $b=0$, por lo que la ecuación de la recta es $y = \frac{3}{2}x$

Para trazar la recta cuya pendiente tiene intercepto en y (0, -1)

- Se ubica el punto de intersección con el eje y (0, -1).
- Luego, con el punto de intersección de las rectas (2,3) se traza la recta que pasa por estos dos puntos.
- Se define la pendiente de la nueva recta, que en este caso es $m = \frac{4}{2} \Rightarrow m=2$

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Desarrollo



El docente presenta el tema

Ahora grafica y plantea el sistema de ecuaciones teniendo en cuenta las condiciones dadas:

- a) Una recta con $m= 2$ y $b=3$
Y otra recta con $m= 1$ y $b=5$
- b) Dos jóvenes, que se desplazaban en línea recta, se han encontrado en un punto que representado en un plano tendría como coordenadas (4,5) y el punto de partida de uno corresponde a las coordenadas (0,3) y el punto de partida del otro presenta las coordenadas (0,7).

R/

Solución a los sistemas **a** y **b**:

- a) Son dos recta, una que pasa por los puntos (0, 3) y (1,5) teniendo en cuenta la pendiente dada en el enunciado.
La otra recta pasa por los puntos (0,5) y (1,6) teniendo en cuenta la pendiente dada en el enunciado. Estas dos rectas se intersecan en (2,7).

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} -2x+y &= 3 \\ -x+y &= 5 \end{aligned}$$

- b) Como solución se obtendrán dos rectas cuyo punto de intersección es (4,5).
Una recta pasa por los puntos (0,7) y por el punto de corte (4,5).

La otra recta pasa por el punto de corte (4,5) y por (0, 3),

Las ecuaciones quedan, así:

$$\begin{aligned} b=3 \quad m=1/2 & & b=7 \quad m=-1/2 \\ -x/2+y=3 & & x/2+y=7 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

En este ejercicio el docente presenta cuatro graficas diferentes para que el estudiante escriba cuál es el sistema de ecuaciones que se ajusta a cada una, y proponga una situación para cada gráfica.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Desarrollo



El docente presenta el tema

R/

Para la gráfica 1, se ajusta el siguiente sistema:

$$y + (1/5)x = 1$$

$$y + (4/5)x = -2$$

Para la gráfica 2, se ajusta el siguiente sistema:

$$y + x = 2$$

$$y - (2/3)x = -3$$

Para la gráfica 3, se ajusta el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \text{a) } & y + x = -2 \\ & y - 2x = 1 \end{aligned}$$

Para la gráfica 4, se ajusta el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \text{b) } & y - x/4 = 2 \\ & y + x/4 = 4 \end{aligned}$$

El docente dará el espacio para que los estudiantes socialicen las situaciones que proponen.

Actividad 2. Reconociendo la pertinencia del uso de un método (sk 1.5)

El docente presenta dos sistemas de ecuaciones para que el estudiante los resuelva por el método que considere más adecuado, y argumente por qué eligió dicho método, así:

Para cada uno de los siguientes dos sistemas de ecuaciones 2×2 elige un método de solución y resuelve el sistema en el Material del estudiante, además sustenta por qué elegiste los respectivos métodos.

$$\begin{aligned} \text{a) } & y = 2x + 3 \\ & y = -\left(\frac{3}{2}\right)x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & x - 3y = 5 \\ & 3x + 5y = -2 \end{aligned}$$

Posteriormente el docente presenta el desarrollo de ambos sistemas, por cinco métodos (método gráfico, de igualación, de sustitución, de reducción y por determinantes) con el fin de que el estudiante pueda comparar y concluya si su elección fue la mejor o cual pudo haber sido la mejor elección.

**Recurso 5:
Interactivo**

Presentación del desarrollo de cada método para solucionar un sistema de ecuaciones

Material del estudiante

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Desarrollo



El docente presenta el tema

Por último, el docente les indica a los estudiantes que no existe una regla que indique que se debe tener en cuenta para elegir un método. Y les advierte que solo la experiencia y la apropiación que tengan de los diferentes métodos, les ayudará a realizar una mejor elección.

R/ Sistema a

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 2x+3 \text{ ecuación 1} \\ y &= -\frac{3}{2}x+2 \text{ ecuación 2} \end{aligned}$$

Método de Gráfico

Se hallan por lo menos dos puntos de corte para cada recta, en la ecuación, así:

Para la ecuación 1:

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y=3$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=-3/2$$

Para la ecuación 2:

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y=2$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x= 4/3$$

Dichos puntos se llevan al plano cartesiano y se construyen las rectas.

Método de igualación

$$\text{a) } y = 2x+3$$

$$y = -\frac{3}{2}x+2$$

$$2x+3 = \frac{3}{2}x+2$$

$$2x+\frac{3x}{2} = -3+2$$

$$\frac{7}{2}x = -1$$

$$x = -\frac{1}{\frac{7}{2}}$$

$$x = -2/7$$

Remplazo x en una de las ecuaciones

$$y = 2(-2/7)+3$$

$$y = -4/7+3$$

$$y = 17/7$$

$$y = 2,42...$$

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Desarrollo



El docente presenta el tema

Método de sustitución

Por estar una incógnita despejada en las dos ecuaciones este terminaría desarrollándose de la misma manera que el método de igualación.

Método de reducción

Se organizan las ecuaciones, dejando solo el termino independiente después del igual , así:

$-2x + y = 3$ y $3/2 x + y = 2$, después anulo una de las variable, por ejemplo y, para ello multiplico cada ecuación por el coeficiente de y de la ecuación contraria, así:

$$1 \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{3}{2}x + y = 2 \\ -2x + y = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{3}{2}x + y = 2 \\ 2x - y = -3 \end{array}$$

- Ahora suma ambas nuevas ecuaciones, me queda $\frac{7}{2}x = -1 \Rightarrow x = -2/7$

- Reemplazo el resultado en una de las ecuaciones iniciales:

$$Y = 2(-2/7) + 3 \Rightarrow$$

$$Y = \frac{-4}{7} + 3 \Rightarrow$$

$$Y = 17/7 \Rightarrow Y = 2,42...$$


Método de determinantes

Determinantes: si $-2x + y = 3$ y $\frac{3}{2}x + y = 2$, entonces:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$x =$	$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$	$y =$	$\begin{vmatrix} 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix}$
$\frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2}$		$\frac{-2 \cdot 1 - 3 \cdot 3}{-2 \cdot 1 - 3 \cdot 3}$		$\frac{3/2 \cdot 1 - 2 \cdot 3/2}{3/2 \cdot 1 - 2 \cdot 3/2}$
$\frac{3 - 4}{3 - 4} = \frac{-1}{-1} = 1$		$\frac{-2 - 9}{-2 - 9} = \frac{-11}{-11} = 1$		$\frac{3/2 - 3}{3/2 - 3} = \frac{-3/2}{-3/2} = 1$

R/ Sistema b

$$\begin{array}{l} x - 3y = 5 \quad \text{ecuación 1} \\ 3x + 5y = -2 \quad \text{ecuación 2} \end{array}$$

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
<p>Desarrollo</p> 	<p>El docente presenta el tema</p>	<p>Por el método gráfico</p> <p>Se hallan por lo menos dos puntos de corte para cada recta, en la ecuación, así:</p> <p>Para la ecuación 1: Si $x = 0 \Rightarrow y = -5/3$ Si $y = 0 \Rightarrow x = 5$</p> <p>Para la ecuación 2: Si $x = 0 \Rightarrow y = -2/5$ Si $y = 0 \Rightarrow x = -2/3$</p> <p>Dichos puntos se llevan al plano cartesiano y se construyen las rectas.</p> <p>Por el método de igualación</p> <p>Se despeja la misma variable en ambas ecuaciones:</p> <p>a) $x = 3y + 5$ ecuación 1 $x = \frac{-5y - 2}{3}$ ecuación 2</p> <p>Se igualan las ecuaciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • $3y + 5 = \frac{-5y - 2}{3}$, después $3y - \frac{-5y - 2}{3} = -5$ • Despejando $9y + 5y = -2 - 15$, entonces $y = -17$ • Reemplazando y en una de las ecuaciones: $x = 3 \cdot (-17/14) + 5 \Rightarrow x = (-51/14) + 5 \Rightarrow x = 19/14$ <p>Por el método de reducción</p> <p>Se organizan las ecuaciones, dejando solo el termino independiente después del igual, así:</p> <p>$x - 3y = 5$ y $3x + 5y = -2$, después anulo una de las variable, por ejemplo x, para ello multiplico cada ecuación por el coeficiente de x de la ecuación contraria, pero cambio el signo en un, así:</p> <p>3 • $x - 3y = 5 \Rightarrow 3x - 9y = 15$ -1 • $3x + 5y = -2 \Rightarrow -3x - 5y = 2$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ahora suma las dos nuevas ecuaciones, me queda $-14y = 17 \Rightarrow y = -17/14$ • Reemplazo el resultado en una de las ecuaciones iniciales: $x = 3 \cdot (-17/14) + 5 \Rightarrow x = 19/14$ 	

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Desarrollo



El docente presenta el tema

Por el método de Sustitución

Se despeja una de las dos variables en una de las ecuaciones:

$$x = 3y + 5$$

Se reemplaza x en la segunda ecuación y se halla y:

$$3 \cdot (3y + 5) + 5y = -2$$

$$\Rightarrow 9y + 15 + 5y = -2$$

$$\Rightarrow y = -17/14$$

Reemplaza y en una de las dos ecuaciones:

$$x - 3 \cdot (-17/14) = 5 \Rightarrow x = 19/14$$

Por determinantes

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad x = \frac{25 - 6}{5 - (-9)} = \frac{19}{14}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad y = \frac{-2 - 15}{5 - (-9)} = \frac{-17}{14}$$




Actividad 3. Reconoce métodos de solución para sistemas de ecuaciones n x n (sk1.2)

El docente presenta una situación problema y solicita a los estudiantes plantear el sistema de ecuaciones para este y solucionarlo, bien sea por los métodos vistos anteriormente o por otro método.

Luis Carlos fue al mercado y le ofrecieron tres canastas de frutas, así: la primera canasta contenían: 3 manzanas, 2 peras y 4 piñas, por \$12.800; una segunda canasta de 5 manzanas, 3 peras y 2 piñas, por \$9.500; una tercera canasta contenía 6 unidades de cada uno de las anteriores frutas, por \$21.600. ¿Cuál es el costo de cada fruta?

Recurso Interactivo 6

Consulta en textos o paginas virtuales

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
Desarrollo 	El docente presenta el tema	<p>Posteriormente el docente le advierte a los estudiantes que en el anterior problema se presentan tres situaciones con tres cantidades desconocidas, lo cual se puede modelar con un sistema de ecuaciones 3×3, el cual se puede resolver por los métodos vistos anteriormente o por otro métodos. Luego, se les solicita a los estudiantes que consulten qué otros métodos hay para solucionar sistemas de ecuaciones 3×3 o $n \times n$. Para lo cual les recomienda consultar libros de texto o internet acerca de matrices, método de eliminación de Gauss u otros.</p> <p>Una vez los estudiantes realicen la consulta, el docente brindará un espacio para socializar.</p>	
Resumen 	Resumen	El docente presenta un resumen por medio de un recurso interactivo. En este se menciona la temática que abarcó el documento del Material del estudiante.	Recurso 6: Interactivo Se presenta un corto resumen de lo visto en el documento
Tarea 	Tarea	<p>Q1. Soluciona cada uno de los siguientes sistemas por el método que creas más conveniente.</p> <p>a) $3a+2b=23$ $-3a+3b= -3$ $a= 5 \quad b=4$</p> <p>a) $x+3y= -6$ $2x-5y=-8$ $X= -54/11 \quad y= -4/11$</p> <p>Q2. a) A partir del siguiente grafico responde:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es el valor de X, y el valor de Y en el punto de corte? • Propón un sistema de ecuaciones que cumpla con el grafico. • Propón una situación que se ajuste al sistema de ecuación. <p>$x=2 \quad y=3$</p> <p>sistema de ecuaciones $2x+2y=10$ $-2x+2y=2 \quad \text{ó} \quad 2y-2x=2$</p> <p>Posible problema</p> <p>X= hermano menor Y= hermano mayor</p>	Recurso 7 Material del estudiante Ejercicios para resolver.

Etapa	Flujo de aprendizaje	Enseñanza/Actividades de aprendizaje	Recursos recomendados
-------	----------------------	--------------------------------------	-----------------------

Tarea



Tarea

El doble de las edades de dos hermanos suman 10, si al doble de la edad del hermano mayor le restamos el doble de la edad del hermano menor tenemos como resultado 2. ¿Cuántos años tiene cada uno?

a) Grafica y plantea el sistema de ecuaciones para la siguiente situación, además di cuál es la solución del sistema.

Dos rectas pasan por:

Recta a. Intercepto en el eje y (0,6) y pasa por (6,5)

Recta b. $m=1/3$ $b=3$

$$x/6+y=6$$

$$-x/3+y=3$$

Solución

$$X=6 \quad y=5$$

La gráfica en el plano son dos rectas que se cortan en el punto (6,5)